Barème : 2 points par question

UNIVERSITE PAUL SABATIER

TOULOUSE III

année 2004/2005

Licence de Physique, Chimie et Applications
L3 PHYSIQUE FONDAMENTALE

EXAMEN TERMINAL de Mécanique Quantique

Session du 25 janvier 2005
Durée : 3h - Tous documents interdits

Exercice : Atome d'hydrogène

1. Rappeler l'expression du Hamiltonien Ĥ pour l'atome d'hydrogène ainsi que les valeurs propres des opérateurs $\hat{H}$, $\hat{L}^2$ et $\hat{L}_z$ associées aux états propres Ψ_{nlm}.

2. Quelle valeur peut prendre le nombre quantique n ? Pour un n donné, quelle valeur peut prendre le nombre quantique l ? Pour un l donné, quelle valeur peut prendre le nombre quantique m?

3. Soit la fonction d'onde Ψ_{1s} de l'atome d'hydrogène : $\Psi_{1s}=\frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)$, où r désigne la distance de l'électron au noyau et a_0 le rayon de Bohr ($a_0 = 0,53$ Å).

   Ecrire la densité volumique $\rho_{v\ 1s}(r,\theta,\varphi)$ et la densité radiale $\rho_{r\ 1s}(r)$ de probabilité de présence pour l'état $1s$.

4. Déduire de cette dernière les valeurs moyennes $< r >$, $< r^2 >$, ainsi que l'écart type Δr pour l'état $1s$.

5. Calculer la distance au noyau où la densité radiale de probabilité de présence est maximale.

6. Donner la valeur des nombres quantiques n, l, m pour cet état.

On rappelle :

$$\int_0^\infty r^n\,exp(-ar)dr=\frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{avec a > 0 et n entier > -1.}$$

Exercice : Particule chargée dans un champ magnétique

La force de Lorentz classique $\vec{f}=q\vec{v}\wedge\vec{B}$, subie par une particule de charge q qui se déplace à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$, ne dérive pas d'un potentiel. Aucun élément du principe de correspondance ne permet à priori d'écrire simplement le Hamiltonien quantique de cette particule. Nous nous proposons de l'établir.

TSVP

Dans la suite, et à des fins de simplification du problème, on supposera le champ magnétique $\vec{B}$ uniforme, constant et parallèle à l'axe Oz. En outre, on introduira le potentiel vecteur $\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{B}\wedge\vec{r}$, avec $\vec{r}$ le vecteur position.

1. Après avoir rappelé l'équation du mouvement classique d'une particule de masse m et de charge q dans ce champ, donnez les caractéristiques du mouvement (trajectoire). Pour la simplicité des calculs, on posera $\omega=\frac{qB}{m}$ la pulsation cyclotron. En outre, la particule est à l'origine du repère cartésien à l'origine des temps.

2

2. On considère l'observable $\hat{\vec{u}}=\hat{\vec{p}}-q\hat{\vec{A}}$ pour laquelle $\hat{\vec{p}}$ est l'observable impulsion habituelle, et $\hat{\vec{A}}$ celle correspondant au potentiel vecteur. Calculer les composantes de $\hat{\vec{p}}$ et de $\hat{\vec{A}}$ 1, puis montrer l'égalité $\hat{\vec{p}}\hat{\vec{A}}=\hat{\vec{A}}\hat{\vec{p}}$. 0,5 Calculer les commutateurs des différentes composantes de $\hat{\vec{u}}$. 0,5

2

3. On postule que le Hamiltonien cherché est de la forme $\hat{H}=\frac{1}{2m}\hat{\vec{u}}^2=\frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}}-q\hat{\vec{A}}\right)^2$.

   A l'aide du théorème d'Ehrenfest valable pour une observable $\hat{O}$ quelconque $\frac{d}{dt}\langle\hat{O}\rangle=\left\langle\frac{\partial\hat{O}}{\partial t}\right\rangle+\frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{O},\hat{H}\right]\right\rangle$, et après avoir remarqué que $\left\langle\frac{\partial\hat{\vec{r}}}{\partial t}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial\hat{\vec{u}}}{\partial t}\right\rangle=0$, calculer les grandeurs $\frac{d}{dt}\langle\hat{\vec{r}}\rangle$ 1 et $\frac{d}{dt}\langle\hat{\vec{u}}\rangle$ 1. Vérifier que l'on obtient pour ces valeurs moyennes (et donc dans la limite classique), l'équation du mouvement habituelle.

2

2

4. De ce qui précède, exprimer l'observable vitesse $\hat{\vec{v}}$ en fonction de $\hat{\vec{u}}$. Vérifier alors que le Hamiltonien postulé dans la question précédente correspond bien à la forme classique de l'énergie de la particule. 0,5

   Quelle conclusion peut-on tirer quant à la relation entre impulsion $\hat{\vec{p}}$ et quantité de mouvement $m\hat{\vec{v}}$ en présence d'un champ magnétique ? 0,5

   Les diverses composantes de la vitesse d'une particule chargée peuvent-elles être simultanément bien déterminées dans un champ magnétique ? 0,5

   On rappelle l'inégalité de Schwarz qui relie les écarts type de deux opérateurs hermitiens $\hat{M}$ et $\hat{N}$ qui correspondent à deux observables physiques M et N : $\Delta M\Delta N\geq\frac{1}{2}\left|\left\langle\left[\hat{M},\hat{N}\right]\right\rangle\right|$. Appliquer pour $\Delta v_x\Delta v_y$. 0,5