UNIVERSITÉ PAUL SABATIER	L3 PHYSIQUE FONDAMENTALE

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2007–2008

MÉCANIQUE QUANTIQUE

Interrogation n° 2 (*durée 20 mn*)

Questions de cours

1. On rappelle l'expression de l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique en unités réduites :

$$H = \frac{P^2}{2} + \frac{X^2}{2}$$

Donner la définition des opérateurs a et a^+, et en déduire le commutateur $[a, a^+]$.

2. On note $|n\rangle$ un état propre de l'opérateur a^+a de valeur propre n, supposé normalisé. Calculer $a^+|n\rangle$ et $a|n\rangle$ en les exprimant en fonction des kets $|n+1\rangle$ et $|n-1\rangle$.

Exercice : Franges de Ramsey

On considère un atome de spin 1/2 en présence d'un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B_0\vec{e}_z + B_1\vec{e}_y$. On rappelle que le hamiltonien d'interaction entre cet atome et le champ est :

$$H = g\mu_{_B}\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{S}$$

où les 3 composantes du spin sont données par :

$$S_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad S_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'atome est préparé initialement dans l'état $|+\rangle$ au temps $t = 0$. On applique successivement trois champs magnétiques :

Étape 1 : de 0 à t_1, $B_0 = 0$ et $B_1 \neq 0$;

Étape 2 : puis de t_1 à $t_1 + T$, on a $B_0 \neq 0$ et $B_1 = 0$;

Étape 3 : finalement, on applique de nouveau le premier champ pendant un temps t_1.

On détecte les atomes qui sont dans l'état $|-\rangle$ à l'issue de la troisième étatpe. On note $g\mu_{_B}B_0 = \hbar\omega_0$ et $g\mu_{_B}B_1 = \hbar\omega_1$.

1. On commence par traiter l'étape 2 : On suppose qu'à l'issue de l'étape 1, l'état est $|\varphi(t_1)\rangle = a_1|+\rangle + b_1|-\rangle$. Écrire les coefficients a_2 et b_2 de l'état $|\varphi(t_1+T)\rangle = a_2|+\rangle + b_2|-\rangle$ après l'étape 2.

2. On traite maintenant l'évolution au cours des étapes 1 et 3. En écrivant l'équation de Schrödinger dépendant du temps, montrer que l'évolution du ket $|\varphi(t)\rangle = a(t)|+\rangle + b(t)|-\rangle$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{a} + i\dot{b} &= i\,\frac{\omega_1}{2}\,(a+ib) \\ \dot{a} - i\dot{b} &= -\,i\,\frac{\omega_1}{2}\,(a-ib) \end{aligned}$$

3. En déduire les coefficients a_1 et b_1 à l'issue de l'étape 1.

4. En déduire qu'à l'issue de la dernière étape, le coefficient b_3 de l'état $|\varphi(2t_1+T)\rangle = a_3|+\rangle + b_3|-\rangle$ vaut $b_3 = 2\sin(\omega_1 t_1)\cos(\omega_0 T/2)$.

5. La probabilité de trouver l'atome dans l'état $|-\rangle$ à l'issue de l'opération présente des oscillations en fonction de T. Quelle est la période de ces oscillations ? *Cette méthode permet une mesure très précise de ω_0, et est utilisée actuellement en métrologie pour les horloges atomiques (dans un contexte légèrement différent)*