

**Licence de Physique**

**Mécanique Quantique : Contrôle II** (durée 45 min)

Etudiant(e) :

**Question I** (10 points) : Oscillateur harmonique à deux dimensions

L'hamiltonien d'un système physique s'écrit :

$\widehat{H}_2 = \widehat{H}_x + \widehat{H}_y$  avec  $\widehat{H}_x = \frac{1}{2}(\widehat{P}_x^2 + \widehat{x}^2)$  et  $\widehat{H}_y = \frac{1}{2}(\widehat{P}_y^2 + \widehat{y}^2)$ , où  $\widehat{x}$  et  $\widehat{y}$  sont les opérateurs associés aux coordonnées  $x$  et  $y$ , et  $\widehat{P}_x$  et  $\widehat{P}_y$  sont les opérateurs associés aux impulsions selon  $x$  et  $y$ .

Soit  $\Psi_2(x, y)$  une fonction propre de  $\widehat{H}_2$ .

1) Montrer que  $\Psi_2(x, y) = \Psi_x(x)\Psi_y(y)$  avec  $\Psi_x(x)$  et  $\Psi_y(y)$  des fonctions propres de  $\widehat{H}_x$  et  $\widehat{H}_y$  respectivement.

2) Ecrire les valeurs propres de  $\widehat{H}_2$ .

Soit  $\widehat{H}_{\text{tot}} = \widehat{H}_2 + \widehat{H}_c$  avec  $\widehat{H}_c = \widehat{x}\widehat{y}$  un hamiltonien qui couple les deux coordonnées.

3) Montrer que  $\Psi_2(x, y) = \Psi_x(x)\Psi_y(y)$  n'est pas une fonction propre de  $\widehat{H}_{\text{tot}} = \widehat{H}_2 + \widehat{H}_c$ .

*Rappel :*

$$\widehat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{A}_x + \widehat{A}_x^\dagger) ;$$

**Question II** (10 points) : Evolution d'un spin 1/2 dans le temps

Soient  $|+\rangle$  et  $|-\rangle$  les états propres d'une particule de spin 1/2. Soit  $\widehat{H}_s$  l'hamiltonien du système.

$$\widehat{H}_s = \omega_0 \widehat{S}_z ; \quad \omega_0 \text{ étant une constante.}$$

1) Quel sont les valeurs propres et les vecteurs propres de  $\widehat{H}_s$  ?

Soit  $|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\theta}{2}} |+\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{+i\frac{\theta}{2}} |-\rangle$  un état de spin quelconque à l'instant  $t=0$ .

2) Ecrire l'état  $|\Psi\rangle$  à l'instant  $t$  quelconque.

3) Calculer  $\langle \widehat{S}_z \rangle, \langle \widehat{S}_x \rangle, \langle \widehat{S}_y \rangle$ .

4) Donner une interprétation physique du résultat obtenu en 3).

*Rappel :*

$$\widehat{S}_x = \frac{\widehat{S}_+ + \widehat{S}_-}{2} ; \widehat{S}_y = \frac{\widehat{S}_+ - \widehat{S}_-}{2i}$$