UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
TOULOUSE III

L2 PHYSIQUE ET CHIMIE – OPTION PHYSIQUE

TRAVAUX DIRIGÉS

MÉCANIQUE DES SOLIDES

SEMESTRE S4

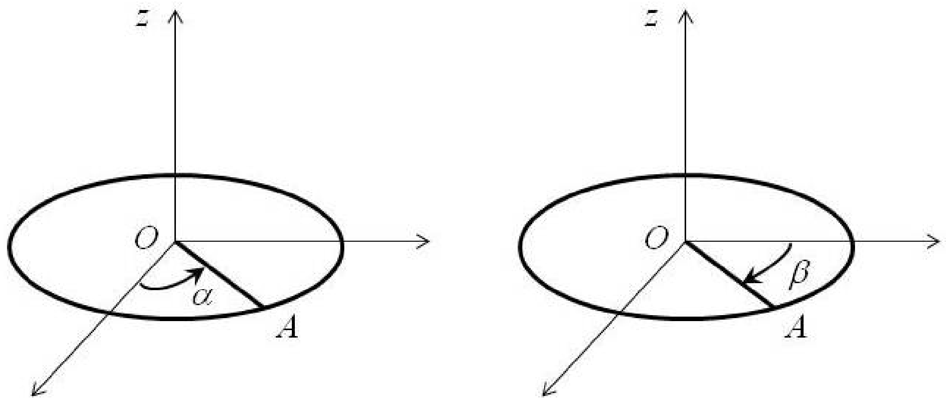
Enseignants : F. Pettinari, G. Fruit & A. Le Padellec

Thème 1 : Cinématique du solide

Exercice 1 : Disque tournant

Un disque tourne autour de l'axe $(O, \mathbf{e}_z)$ du repère d'observation $\mathcal{R}$.

1) Exprimer et représenter le vecteur rotation du disque $\boldsymbol{\Omega}(t)$ dans les deux cas suivants :



2) En utilisant l'expression $\mathbf{v}_{A/R} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OA}$, montrer que la vitesse d'un point A situé à la périphérie du disque possède, dans chacun des cas, la direction et la valeur attendues.

Exercice 2 : Mouvement d'un point au périmètre d'un disque

Un disque de rayon r tourne uniformément autour de son axe, à une vitesse angulaire ω. Son centre C se déplace sur la droite horizontale $z = r$ du plan vertical Oxz du référentiel $\mathcal{R} = (Oxyz)$. On appelle $\mathcal{R}^*$ le référentiel $(Cxyz)$, en translation par rapport à $\mathcal{R}$, d'origine C, et on désigne par θ l'angle que fait un rayon $\mathbf{CA}$ du disque avec Cz, A étant un point quelconque de la périphérie.

1) Exprimer dans la base de $\mathcal{R}$, la vitesse et l'accélération de A par rapport à $\mathcal{R}^*$.

2) Quelle vitesse par rapport à $\mathcal{R}$ doit-on donner à C pour que la vitesse $\mathbf{v}_{B/\mathcal{R}}$ du point le plus bas du disque soit nulle ?

3) Trouver les équations $x = x(\theta)$ et $z = z(\theta)$ du point A, sachant que, pour $t = 0$, $x = 0$ et $z = 2r$.

4) Retrouver la vitesse d'un point du disque en appliquant l'expression établie pour le champ des vitesses dans un solide.

Exercice 3 : Différentiel d'une automobile

Le différentiel d'une automobile est schématisé sur la figure 1. Le référentiel $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$ est lié au véhicule, il représente le carter du moteur. Les deux planétaires $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, disques identiques de rayon b, sont solidaires des roues et tournent respectivement aux vitesse angulaires ω_1 et ω_2 autour de l'axe Oz. Le satellite, disque $\mathcal{S}$ de rayon a, peut tourner autour de son axe Oz' à la vitesse angulaire ω_s tout en restant en contact avec les deux planétaires en I_1 et en I_2. Par ailleurs l'axe Oz' du satellite est solidaire d'un boîtier repéré par le référentiel $\mathcal{R}' = (O, x', y', z')$ capable de tourner autour de l'axe (Oz) à la vitesse ω_0 de l'arbre moteur.

On notera M_1 et M_2 les points des planétaires en contact avec le satellite et N_1, N_2 les points du satellite $\mathcal{S}$ en contact avec les planétaires. M_1, N_1 et I_1 coïncident donc à chaque instant.

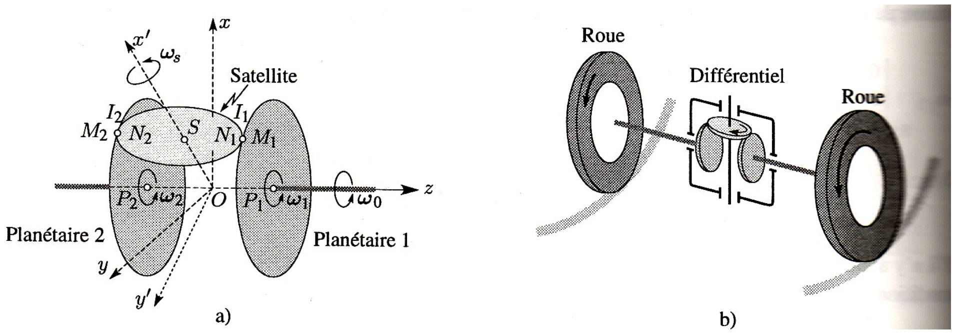


FIGURE 1 – Différentiel d'une automobile - vue schématique

1) Expliquer *qualitativement* le principe du différentiel. Quel est en particulier le but recherché ?

2) Exprimer *dans la base de* $\mathcal{R}'$, la vitesse $\mathbf{v}_{S/\mathcal{R}}$ du centre S du satellite par rapport à $\mathcal{R}$. Que vaut cette même vitesse par rapport à $\mathcal{R}'$?

3) En déduire les vitesses $\mathbf{v}_{N_1/\mathcal{R}}$ et $\mathbf{v}_{N_2/\mathcal{R}}$ des points N_1 et N_2 du satellite par rapport à $\mathcal{R}$.

4) Exprimer, toujours dans la base de $\mathcal{R}'$, les vitesses $\mathbf{v}_{M_1/\mathcal{R}}$ et $\mathbf{v}_{M_2/\mathcal{R}}$ des points M_1 et M_2 par rapport à $\mathcal{R}$.

5) Écrire la condition de roulement sans glissement du satellite par rapport aux planétaires et obtenir les relations entre ω_1, ω_2, ω_0 et ω_s. Commenter.

Exercice 4 : Cône roulant sans glisser sur un plan

Un cône de demi-angle au sommet γ est en contact suivant l'une de ses génératrices avec un plan horizontal (O, x, y) fixe dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$. Il roule sans glisser sur Oxy (cf. figure 2).

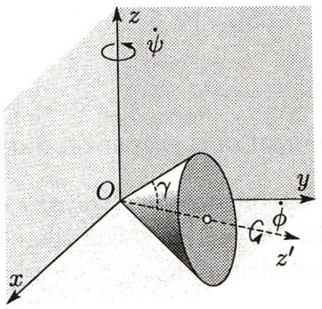


FIGURE 2 – Cône sur un plan horizontal

1) Rappeler la définition des angles d'Euler en précisant les repères associés à chaque angle. Dans cet exercice, un des angles demeure constant, lequel ?

2) Exprimer le vecteur rotation ω du cône en fonction de $\dot{\psi}$ et $\dot{\phi}$.

3) En utilisant la condition de roulement sans glissement, déterminer l'orientation du vecteur ω et en déduire la relation entre $\dot{\psi}$, $\dot{\phi}$ et γ.

Thème 2 : Éléments cinétiques des solides

Exercice 1 : Centre de masse d'une demi-boule

On considère une demi-boule homogène de centre O, de rayon R et de masse volumique ρ_m. Le solide étant homogène, cette dernière est constante. Par rapport à un repère orthonormé direct $(Oxyz)$, son plan de base est le plan xOy.

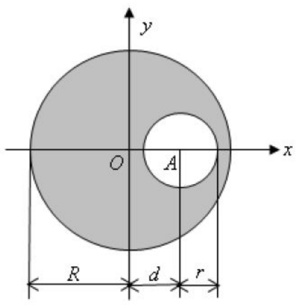
1) Montrer que les symétries du solide font que son centre de masse G est sur l'axe Oz.

2) Calculer la coordonnée z_G du centre de masse G. Faire le calcul en coordonnées sphériques.

3) Le refaire en découpant la demi-boule en tranches parallèles au plan de base et d'épaisseur dz.

Exercice 2 : Centre de masse d'un disque évidé

On considère un disque plein homogène de centre O, de rayon R et de densité surfacique σ. On creuse dans ce disque un trou circulaire de centre A et de rayon r.



1) Calculer la position du centre de masse C de la partie de disque restante en fonction de $d = OA$, R, r et σ.

2) Faire un schéma illustrant la position de C par rapport à O et A lorsque $r = R/2$.

Exercice 4 : Grandeurs cinétiques de deux tiges articulées

Dans un référentiel $\mathcal{R} = (Oxyz)$ avec Oz verticale ascendante, deux tiges homogènes $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ de masses m_1 et m_2 et de longueurs ℓ_1 et ℓ_2 sont articulées en un point A. On suppose négligeables les dimensions transversales des tiges. L'autre extrémité de la tige $\mathcal{T}_1$ est articulée autour d'un point fixe O. L'ensemble peut osciller dans un plan vertical autour d'un axe horizontal Oy perpendiculaire au plan dans lequel se trouvent les tiges.
On note θ_1 et θ_2 les angles que font respectivement les tiges $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ par rapport à la verticale Oz.

1) Par intégration directe, calculer le moment cinétique $\mathbf{L}_1$ de la tige $\mathcal{T}_1$ par rapport au point O en fonction de m_1, ℓ_1, θ_1 et sa dérivée temporelle $\dot{\theta}_1$.

2) En déduire l'expression du moment d'inertie de la tige $\mathcal{T}_1$ par rapport à l'axe Oy. Si G_1 désigne le centre de masse de $\mathcal{T}_1$, trouver par deux méthodes différentes le moment d'inertie de $\mathcal{T}_1$ par rapport à (G_1y).

3) En utilisant un théorème du cours que vous rappelerez, exprimez le moment cinétique $\mathbf{L}_2$ de la tige $\mathcal{T}_2$ par rapport au point O en fonction de m_2, ℓ_1, ℓ_2, θ_1, θ_2 et leurs dérivées temporelles.

4) Calculer la quantité de mouvement du système des deux tiges dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Exercice 4 : Moments d'inertie de solides usuels

1) Calculer le moment d'inertie d'un cylindre plein homogène de masse M, de rayon R et de hauteur h par rapport à son axe de révolution.

2) Calculer le moment d'inertie d'une boule pleine homogène de masse M et de rayon R par rapport à un axe passant par son centre.

3) Calculer le moment d'inertie de la même boule par rapport à son centre C. On pourra utiliser judicieusement le résultat précédent en considérant trois axes deux à deux orthogonaux et passant par C.

Thème 3 : Dynamique du solide – Théorèmes généraux

Exercice 1 : Chute d'un yoyo

On schématise un yoyo par deux disques identiques homogènes de rayon R et de masse M reliés par un tambour cylindrique de rayon $a < R$ de masse négligeable autour duquel est enroulé un fil. Les deux disques et le tambour sont solidaires et ont même axe (cf. Figure 1).
Le moment d'inertie de chaque disque par rapport à son axe est $J_1 = (1/2)MR^2$.
Une extrémité du fil est attachée au tambour et l'autre à un point fixe O. Le fil étant enroulé, on lâche le système sans vitesse initiale, l'axe étant horizontal. On admet que l'axe reste horizontal au cours du mouvement et que la direction du fil peut être confondue avec la verticale.

1) Faire un bilan des forces s'exerçant sur le système et écrire le théorème de la quantité de mouvement dans cette situation.

2) Écrire le théorème du moment cinétique par rapport à G dans le référentiel du centre de masse.

3) Que peut-on dire de la vitesse du point du tambour en contact avec le fil juste au moment où ce dernier se détache ?

4) En déduire l'accélération linéaire du yoyo et la tension du fil.

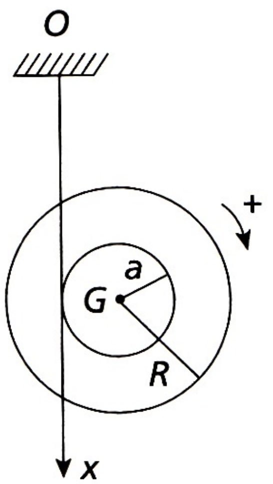


FIGURE 1 - Schéma du yoyo

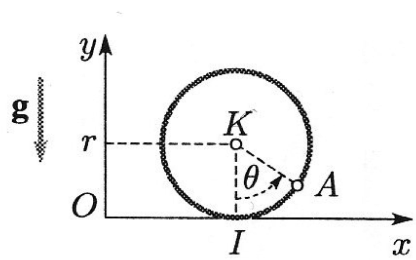


FIGURE 2 - Cerceau lesté sur plan horizontal

Exercice 2 : Dynamique d'un cerceau lesté

Un cerceau homogène $\mathcal{C}$ (centre K, masse M, rayon r) lesté par un point matériel A (masse m) situé sur son périmètre, roule *sans glisser* sur une droite fixe, horizontale, d'un référentiel terrestre $\mathcal{R} = (Oxyz)$. Son plan reste dans le plan Oxy, Oy étant la verticale ascendante et Ox un axe horizontal (cf. Figure 2). On repère la position du lest A sur le disque par l'angle $\theta = (\mathbf{KI}, \mathbf{KA})$.

1) Écrire le théorème de la quantité de mouvement pour le cerceau lesté. Pourquoi ne peut-on pas utiliser cette loi pour déterminer le mouvement du cerceau ?

2) Écrire la condition de roulement sans glissement du disque. Combien de degrés de liberté possède le système étudié ?

3) Moment cinétique du cerceau lesté au point géométrique de contact I.

  a) Établir l'expression du moment cinétique du cerceau seul (sans le lest) par rapport au point I.

b) Calculer le moment cinétique du lest A par rapport au point I.

c) En déduire l'expression du moment cinétique $\mathbf{L}_I$ du cerceau lesté par rapport au point géométrique de contact I en fonction de M, m, r, θ et $\dot{\theta}$.

4) Trouver l'équation différentielle du mouvement satisfaite par θ, à l'aide du théorème du moment cinétique appliqué en I. *Attention : le point géométrique I est mobile !*

5) Quelle est la période des petits mouvements ?

Exercice 3 *(à chercher par vous-même)* : Mouvement d'une barre contre un mur

Une barre AB homogène de section négligeable (masse m, longueur $2L$) repose contre un coin de mur dans le plan vertical Oxy tel que ses extrémités A et B sont en contact *sans frottement* avec les axes Ox et Oy respectivement (cf. Fig. 3). On repère la position de la barre par l'angle $\alpha = (\mathbf{e}_x, \mathbf{OG})$ où G est le centre de masse de la barre. À l'instant initial, $\alpha = \alpha_0$ et la barre est lâchée sans vitesse initiale.

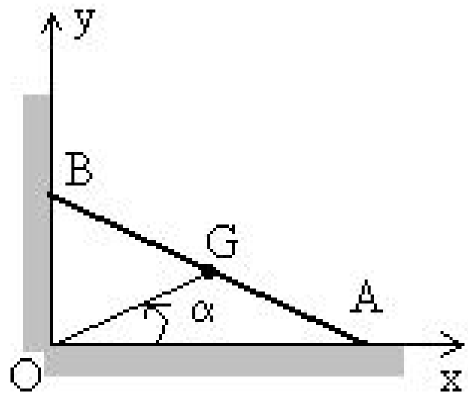


FIGURE 3 - Mouvement d'une barre en contact avec un coin de mur

1) Où se situe le centre de masse G de la barre ?

2) On note I le point d'intersection des directions des réactions de contact en A et B. En raisonnant sur le quadrilatère $OAIB$, montrer que G suit un arc de cercle lorsque la barre glisse sous l'effet de la pesanteur.

3) Appliquer le théorème du centre de masse à la barre et en déduire les deux équations du mouvement selon Ox et selon Oy.

4) Trouver l'équation du mouvement en α à l'aide du théorème du moment cinétique au point mobile I.

5) En déduire une intégrale première du mouvement reliant $\dot{\alpha}$ et α.

6) À quelle condition sur la réaction de contact en B y a-t-il rupture du contact de la barre avec la paroi verticale ? Exprimer alors en fonction de α_0 la valeur α_1 de α au moment où le contact en B cesse.

Thème 4 : Contact entre deux solides – Frottement solide

Exercice 1 : Différentes phases du mouvement d'un disque

Un disque $\mathcal{S}$ de masse m et de rayon r est posé verticalement sur l'axe horizontal Ox d'un référentiel terrestre $Oxyz$ avec une vitesse angulaire égale à $-\omega_0\,\mathbf{e}_z$ ($\omega_0 > 0$) et une vitesse de centre de masse C égale à $v_0\,\mathbf{e}_x$ (cf. Figure 1). On note μ le coefficient de frottement solide entre le disque et le sol.

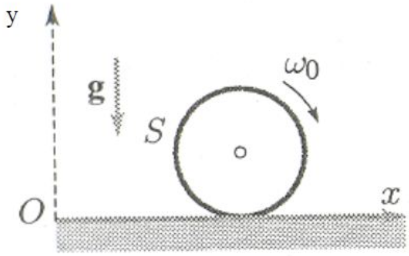


FIGURE 1 - Disque en mouvement sur un plan

1) On suppose $v_0 > r\omega_0$.

a) Étudier le mouvement ultérieur du disque. Montrer en particulier que s'il y a glissement initial, celui-ci cesse au bout d'un temps t_1 que l'on déterminera.

b) Représenter l'évolution de la vitesse de glissement et la force de frottement (tangentielle) en fonction du temps.

2) *(à traiter par vous-même)* Mêmes questions si $v_0 < r\omega_0$.

Exercice 2 : Mesure d'un coefficient de frottement

Une masse M_1 est mobile sur un plan horizontal avec un coefficient de frottement μ. Elle est reliée, par l'intermédiaire d'un fil sans masse et d'une poulie sans frottements et d'inertie négligeable, à une masse M_2 ; cette masse M_2 est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur h au-dessus du sol qui limite sa chute (cf. Figure 2).

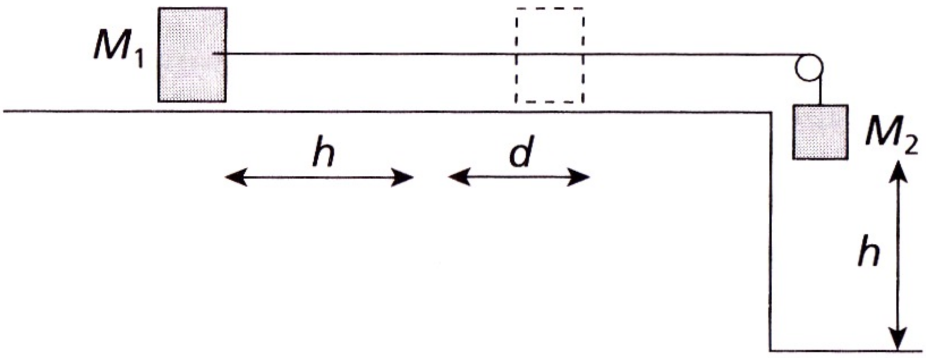


FIGURE 2 - Expérience permettant la mesure d'un coefficient de frottement.

On désigne par $h + d$ la distance parcourue par M_1 sur le plan horizontal avant de s'arrêter. Le but de l'exercice est de relier le coefficient de frottement μ aux distances h et d facilement mesurables.

1) Analyser qualitativement le mouvement des deux masses. Montrer en particulier qu'il peut se décomposer en deux phases distinctes.

2) Au cours de la première phase, le fil reste tendu et on note F le module de la tension du fil identique en tout point du fil.

a) Quelle relation simple existe-t-il entre la vitesse horizontale de la masse M_1 et la vitesse verticale de la masse M_2 ?

b) Écrire le théorème de la quantité de mouvement pour chaque masse. Éliminer la tension du fil inconnue pour déduire une équation différentielle portant sur l'abscisse x_1 de la masse M_1.
Quelle est la nature du mouvement ?

c) Calculer la vitesse v_0 de la masse M_1 lorsque la masse M_2 atteint le sol.

3) Au cours de la seconde phase, seule la masse M_1 est en mouvement. Calculer son accélération linéaire.

4) Déduire une relation entre μ, h, d, M_1 et M_2.

Exercice 3 : Équilibre et mouvement d'un cube sur un plan incliné

Par rapport à un repère $\mathcal{R}_0 = (O, \mathbf{e}_{x_0}, \mathbf{e}_{y_0}, \mathbf{e}_{z_0})$, orthonormé direct, de verticale ascendante $\mathbf{e}_{z_0}$, on considère un plan incliné (P) d'inclinaison α. On associe au plan (P) le repère $\mathcal{R}_1 = (O, \mathbf{e}_{x_1} = \mathbf{e}_{x_0}, \mathbf{e}_{y_1}, \mathbf{e}_{z_1})$. Un cube (C), homogène de masse m, de côté $2a$, dont les arêtes sont parallèles aux axes de $\mathcal{R}_1$ est posé sur le plan (P) comme indiqué sur la figure. On désigne par μ le coefficient de frottement de glissement du cube (C) sur le plan (P).
Le cube est abandonné sans vitesse initiale alors que le plan incliné fait un angle α avec l'horizontale (cf. Figure 3). On cherche à savoir en fonction du coefficient de frottement μ et de l'inclinaison α si le cube peut rester en équilibre sur le plan incliné et, dans le cas contraire, comment se manifeste son premier mouvement : glissement, basculement autour de l'arête Ax_0 ou bien basculement + glissement.

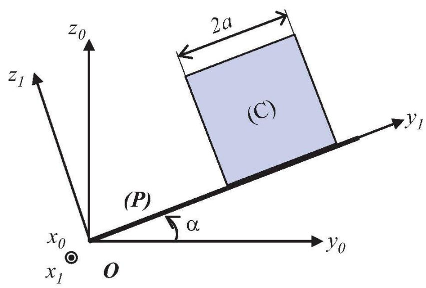


FIGURE 3 - Cube posé sur un plan incliné d'un angle α

A - Étude de l'équilibre du cube sur le plan incliné.

On suppose dans un premier temps que le cube reste en équilibre sur le plan incliné.

1) Faire le bilan des actions extérieures sur (C).

2) Écrire le principe fondamental de la dynamique pour le cube à l'équilibre.

3) Préciser en fonction de μ et de $\tan\alpha$ les conditions pour que le cube soit à l'équilibre vis à vis du glissement (translation) et vis-à-vis du basculement autour de l'arête Ax_0 (rotation).

B - Étude du glissement pur.

On suppose, qu'une fois posé sur le plan incliné, le cube commence à glisser *sans basculer* le long de la ligne de plus grande pente du plan incliné. On note $\vec{a}_G = -\gamma\,\vec{e}_{y_1}$ l'accélération du centre d'inertie G avec $\gamma > 0$.

1) Comment se traduit la loi de Coulomb du frottement solide dans ce cas ?

2) Appliquer le théorème du centre d'inertie pour en déduire γ en fonction de g, μ et α.

3) On note I le point d'application de la résultante des forces de contact du plan incliné sur le cube. En appliquer le théorème du moment cinétique en G, déterminer la position du point I en fonction de a et μ.

4) À quelle condition sur μ et $\tan\alpha$ le glissement pur (sans rotation) est-il possible ?

C - Étude du basculement pur.

On suppose maintenant, qu'une fois posé sur le plan incliné, le cube commence à basculer autour de l'arête Ax_1 sans glisser sur cette arête.

1) On rappelle que le moment d'inertie du cube par rapport à l'axe Gx_1 est égal à $I_G = (2/3)ma^2$. Appliquer le théorème du moment cinétique au cube par rapport au point A. On notera θ l'angle que fait la base du cube avec le plan incliné (cf. Figure 4).

2) En déduire qu'à l'instant $t = 0^+$, c'est-à-dire au moment où le cube commence à basculer on a la relation

$$\ddot{\theta}_0 = -\frac{3\sqrt{2}}{8}\frac{g}{a}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3}{8}\frac{g}{a}\left(\cos\alpha - \sin\alpha\right)$$

3) Calculer, dans la base de $\mathcal{R}_1$, l'accélération du centre d'inertie G du cube en fonction de $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.

4) En appliquant le théorème de la quantité de mouvement au cube dans le référentiel $\mathcal{R}_1$, déduire que les expressions des réactions normale et tangentielle exercées par le plan incliné sur l'arête Ax_0 du cube juste au moment du basculement (à $t = 0^+$) sont données par

$$\begin{aligned} T &= \frac{3}{8}mg\left(\cos\alpha + \frac{5}{3}\sin\alpha\right) \\ N &= \frac{3}{8}mg\left(\sin\alpha + \frac{5}{3}\cos\alpha\right) \end{aligned}$$

5) À quelle condition sur μ et α le cube ne glisse pas sur le plan incliné ?

6) Résumer dans un diagramme $(\mu, \tan\alpha)$ les différents mouvements possibles du cube après l'avoir posé sur le plan incliné sans vitesse initiale.

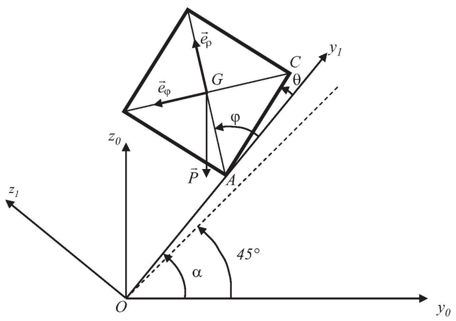


FIGURE 4 - Cube basculant sur un plan incliné d'un angle α

Thème 5 : Énergétique du solide – Rotation autour d'un axe fixe

Exercice 1 : Énergétique d'un cerceau lesté

On reprend l'exercice sur le cerceau lesté vu au thème n^{o}3 pour en faire une étude énergétique. On va montrer que l'on peut obtenir l'équation différentielle du mouvement d'une manière plus rapide et souvent plus élégante en considérant la conservation de l'énergie mécanique.
Un cerceau homogène $\mathcal{C}$ (centre K, masse M, rayon r) lesté par un point matériel A (masse m) situé sur son périmètre, roule *sans glisser* sur une droite fixe, horizontale, d'un référentiel terrestre $\mathcal{R} = (Oxyz)$. Son plan reste dans le plan Oxy, Oy étant la verticale ascendante et Ox un axe horizontal (cf. Figure 1). On repère la position du lest A sur le disque par l'angle $\theta = (\mathbf{KI}, \mathbf{KA})$.

1) Rappeler la condition de roulement sans glissement du cerceau sur l'axe horizontal.

2) Établir l'expression de l'énergie cinétique du cerceau seul dans le référentiel terrestre.

3) Calculer l'énergie cinétique du cerceau lesté dans le référentiel terrestre.

4) Établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du cerceau lesté.

5) Que peut-on dire de l'énergie mécanique du cerceau lesté ?

6) En déduire l'équation différentielle du mouvement satisfaite par θ.

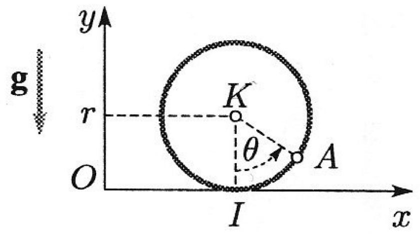


FIGURE 1 - Cerceau lesté sur plan horizontal

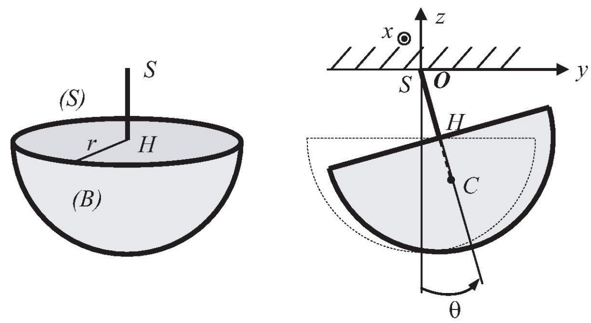


FIGURE 2 - Pendule solide en forme de demi-boule

Exercice 2 : Pendule solide

Un solide de révolution $\mathcal{S}$ est constitué d'une demi-boule homogène $\mathcal{B}$ de base de centre H, de masse M, de rayon r, et d'une tige HS, de masse négligeable devant celle de $\mathcal{B}$, de longueur $\ell = (5/8)r$, de section négligeable, perpendiculaire au plan équatorial de la demi-boule (c.f. Figure 2).
Le solide est suspendu par l'extrémité S en un point O, origine d'un référentiel $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ avec Oz verticale ascendante. Il peut osciller autour de l'axe horizontal Ox, grâce à une liaison pivot parfaite. On désigne par θ l'angle que fait $\mathbf{SH}$ avec la verticale descendante.

1) Combien $\mathcal{S}$ a-t-il de degrés de liberté ?

2) Quel est le système de coordonnées adapté à la description du mouvement ?

3) Faire le bilan des actions extérieures sur $\mathcal{S}$.

4) Comment, la condition de liaison parfaite se traduit-elle du point de vue énergétique ?

5) Établir l'expression de l'énergie mécanique du solide $\mathcal{S}$.

6) En déduire l'équation du mouvement de $\mathcal{S}$.

7) Quelle est la période du mouvement ?

Exercice 3 : Étude d'un système articulé en rotation

Un système plan (Σ) est constitué de 4 tiges $\mathcal{T}_i$ $(i = 1, 4)$, assemblées par des liaisons pivots parfaites, pour former un losange plan déformable $OABA'$. Les 4 tiges sont identiques, elles ont même masse m et même longueur ℓ.
Le losange articulé (Σ) est relié en B à un ressort, de longueur à vide $\ell_0 = \ell/2$ et de raideur k, dont l'autre extrémité F est reliée à la partie inférieure d'un bâti fixe horizontal par une liaison telle que le ressort peut tourner librement sur lui-même autour de F (cf. Figure 3). Le système (Σ) est par ailleurs relié en O, point diamétralement opposé à B, à un moteur dont le bâti est solidaire du bâti précédent de telle sorte que **OF** soit vertical. La distance OF fixe vaut : $OF = (9/2)\ell$.
Le moteur communique à (Σ) un mouvement de rotation uniforme de vitesse Ω autour de l'axe (OF). On associe au bâti le référentiel $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, (Oz) verticale ascendante, et le référentiel $\mathcal{R}_1 = (O, \mathbf{e}_{x_1}, \mathbf{e}_{y_1}, \mathbf{e}_{z_1} = \mathbf{e}_z)$ à (Σ), avec $\mathbf{e}_{y_1}$ parallèle à $\mathbf{AA'}$.

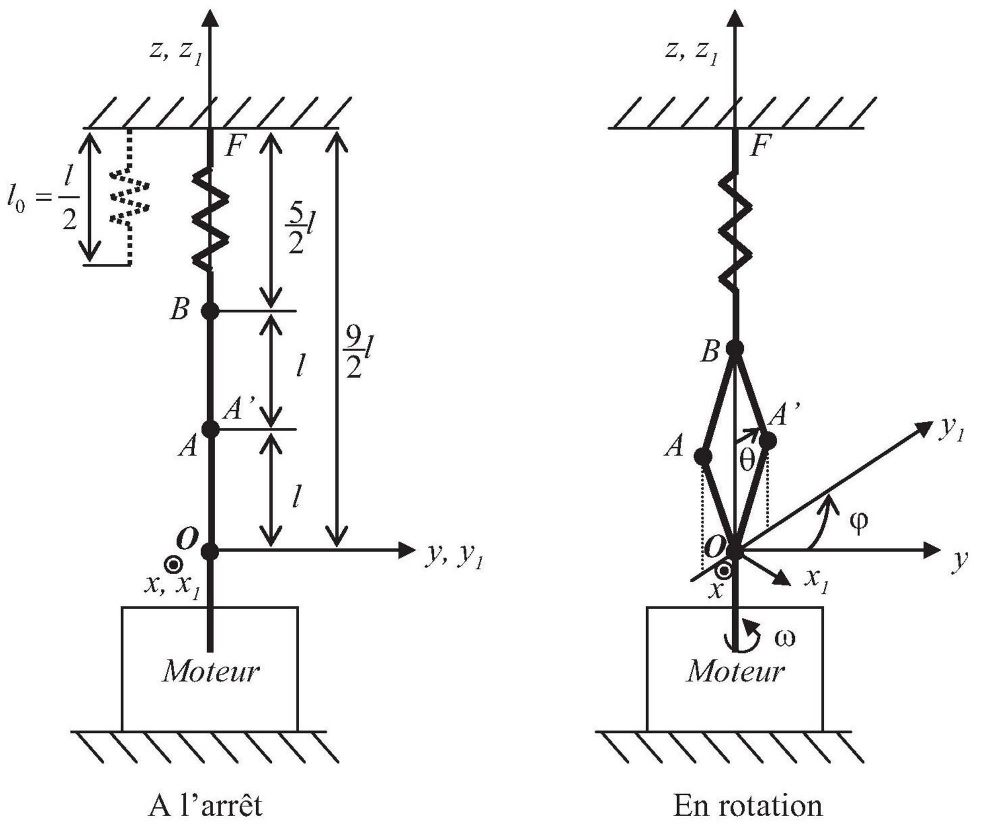


Figure 3 - Système articulé à l'arrêt et en rotation

On désigne par θ l'angle que fait l'une des tiges avec l'axe Oz. On note g l'intensité du champ de pesanteur terrestre et on pose $\omega_0 = \sqrt{3g/\ell}$.

1) Discuter de l'opportunité d'étudier (Σ) dans $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}_1$.

2) Montrer que (Σ) a un seul degré de liberté θ dans $\mathcal{R}_1$.

3) Montrer que dans $\mathcal{R}_1$ l'énergie cinétique totale du système s'écrit

$$E_c = \frac{2}{3} m\ell^2 \left[1 + 3\sin^2\theta\right] \dot{\theta}^2$$

4) Trouver les différentes énergies potentielles du système dans $\mathcal{R}_1$, en déduire que l'énergie potentielle totale du système prend la forme

$$E_p = 2mg\ell \left[2\cos\theta + \frac{k\ell}{mg}\left(\cos^2\theta - 4\cos\theta\right) - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 \sin^2\theta \right] + \text{cste}$$

5) En déduire une intégrale première du mouvement.

6) Montrer qu'il existe une position d'équilibre stable $\theta_e \neq 0$, dans le cas où $k\ell = 2mg$.

7) *(à chercher par vous-même)* En déduire la nature des petits mouvements autour de θ_e.

Exercice 4 *(à chercher par vous-même)* : Oscillations d'un culbuto

On reprend le solide $\mathcal{S}$ étudié à l'exercice 2. Il peut maintenant *rouler sans glisser* sur le plan horizontal Oxy du référentiel $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, Oz verticale ascendante (c.f. Figure 4). On attache à $\mathcal{S}$ le référentiel $\mathcal{R}_1 = (H, \mathbf{e}_{x_1}, \mathbf{e}_{y_1}, \mathbf{e}_{z_1})$. On admettra que si le solide est lâché sans vitesse initiale après avoir été écarté de sa position d'équilibre sur le plan, son mouvement sera un mouvement plan suivant le plan vertical Hy_1z_1. On désigne par θ l'angle que fait SH avec la verticale ascendante.

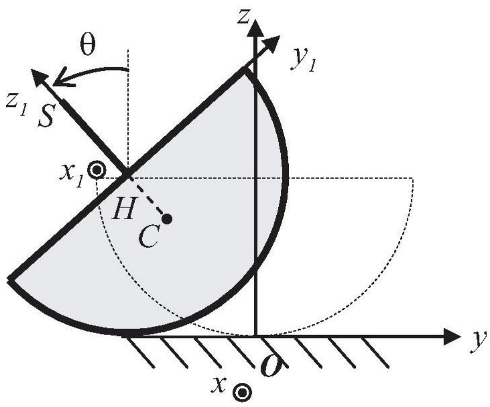


FIGURE 4 - Demi-boule en oscillation sur un plan horizontal

1) Calculer l'énergie mécanique du solide $\mathcal{S}$ en prenant l'origine de l'énergie potentielle pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

2) Établir l'équation différentielle du mouvement.

3) L'intégrer dans le cas des petites oscillations autour de la position d'équilibre et donner la période T de ces oscillations.

Thème 6 : Mouvement gyroscopique – Précession des équinoxes

L'axe de rotation de la Terre est incliné d'un angle $\theta = 23,5^o$ par rapport à l'axe perpendiculaire au plan de l'écliptique. Cette inclinaison appelée obliquité est responsable de l'alternance des saisons au cours de l'année. L'axe de rotation terrestre n'est toutefois pas fixe dans le temps, il possède un mouvement de précession autour de la normale à l'écliptique avec une période T que l'on cherche à calculer. On parle de précession des équinoxes car ce mouvement a pour conséquence de décaler les saisons par rapport au calendrier annuel.
On introduit le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g = (T, X, Y, Z)$ d'origine T, centre de la Terre et tel que les axes (TX) et (TY) sont contenus dans le plan de l'écliptique. On considère aussi le référentiel $\mathcal{R}_t = (T, x, y, z)$ fixe lié à la Terre tel que l'axe (Tz) est confondu avec l'axe de rotation de la planète.

1) Moment des forces gravitationnelles exercées sur la Terre
L'origine physique du mouvement de précession de l'axe (Tz) autour de l'axe (TZ) vient du fait que la Terre n'est pas rigoureusement sphérique et que le Soleil et la Lune exercent des forces gravitationnelles dont le moment par rapport à (TZ) n'est pas nul. On peut montrer que ce moment se met sous la forme

$$\mathbf{M}_T = \frac{3}{4} G(I_1 - I_3) \sin 2\theta \left[\frac{M_S}{r_S^3} + \frac{M_L}{r_L^3} \right] \mathbf{e}_u$$

où I_1 et I_3 sont respectivement les moments d'inertie de la Terre par rapport aux axes (Tx) et (Tz), $\mathbf{e}_u = \mathbf{e}_Z \wedge \mathbf{e}_z$ et avec le valeurs numériques suivantes :
$G = 6,67.10^{-11}$ SI ; $M_S = 2.10^{30}$ kg ; $M_L = 73,5.10^{21}$ kg ; $r_S = 1,5.10^{11}$ m ; $r_L = 380.10^6$ m et $I_3/I_1 = 306/305$.

- **a)** Comparer la contribution de la Lune à celle du Soleil. Ce résultat vous étonne-t-il ?
- **b)** Que se passe-t-il si $I_3 = I_1$? Conclure.

2) Mouvement d'une toupie dans l'approximation gyroscopique
Avant d'étudier les conséquences du moment $\mathbf{M}_T$ sur le mouvement de la Terre, commençons par analyser l'exemple plus simple d'une toupie en rotation dans le champ de pesanteur terrestre.
On considère une toupie mobile autour d'un point fixe O ayant une symétrie de révolution autour de l'axe (Oz) et écartée d'un angle θ par rapport à la verticale ascendante (OZ). La toupie est soumise au champ de pesanteur terrestre $\mathbf{g}$.

- **a)** Calculer le moment $\mathbf{M}_O$ en O des forces de pesanteur s'exerçant sur la toupie.
- **b)** Déterminer à l'aide du théorème du moment cinétique une équation portant sur le moment cinétique $\mathbf{L}_O$ en O de la toupie.
- **c)** Rappeler en quoi consiste l'approximation gyroscopique.
- **d)** En déduire, dans ce cadre, la vitesse de précession angulaire $\dot{\psi}$ de la toupie autour de l'axe (OZ).

3) Vitesse de précession des équinoxes
On se propose de déterminer la vitesse de précession des équinoxes par analogie avec le mouvement de la toupie dans l'approximation gyroscopique.

- **a)** Comparer les expressions des moments $\mathbf{M}_T$ exercé sur la Terre et $\mathbf{M}_O$ exercé sur la toupie.
- **b)** En déduire l'équation d'évolution du moment cinétique $\mathbf{L}_T$ en T de la Terre.
- **c)** Déterminer par analogie avec la toupie la vitesse angulaire de précession des équinoxes.
- **d)** Quelle est la période de ce mouvement ?