Ex 2

I) 1) $T(\overline{OO}) = R(O)\, T(\overline{OS})\, R_m(S)\, T(\overline{SO})\, R(O)$

En effet tout se passe dans l'air. Il y a successivement passage dans la lentille, translation lentille - miroir, réflexion sur le miroir, translation miroir - lentille et à nouveau passage dans la lentille. Il y a changement de signe au passage par le miroir.

$$T(\overline{OS}) = \begin{pmatrix} 1 & \overline{OS} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(\overline{SO}) = \begin{pmatrix} 1 & \overline{SO} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (changement de signe).

$$R_m(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_m & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}$$ $V_m = \frac{2}{R}$. (vergence du miroir)

$$R(O) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_e & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix}$$ $V_e = \frac{1}{R} = \frac{1}{f'}$ (vergence de la lentille)

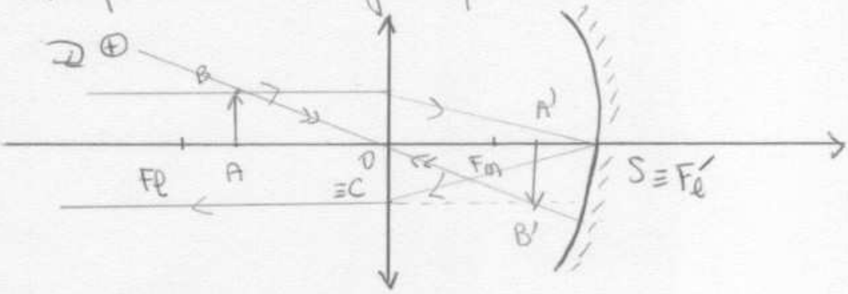
D'où :

$$T(OO) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(OO) = \begin{pmatrix} 1 & R \\ -\frac{1}{R} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & R \\ -\frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(OO) = \begin{pmatrix} -1 & R \\ -\frac{1}{R} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & R \\ -\frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) On déduit que la vergence du système $\underline{V=0}$. (système afocal). Donc à tout rayon incident correspond un émergent parallèle. ⑥



3) $T(\overline{OO}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Entre un point A et un point A':

$T(\overline{AA'}) = T(\overline{OA'})\ T(\overline{OO})\ T(\overline{AO})$

$T(\overline{AA'}) = \begin{pmatrix} +1 & \overline{OA'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \overline{AO} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$T(\overline{AA'}) = \begin{pmatrix} -1 & -\overline{OA'} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \overline{AO} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$T(\overline{AA'}) = \begin{pmatrix} -1 & -\overline{AO} - \overline{OA'} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

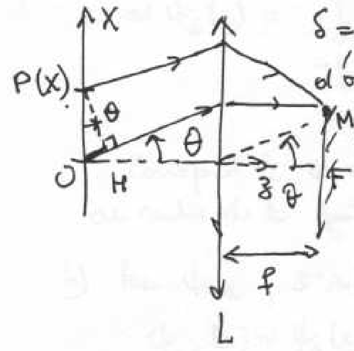
Les deux points étant conjugués, $-\overline{AO} - \overline{OA'} = 0$

$\overline{OA'} = -\overline{AO}$ donc il est négatif.

(A' est après la lentille, à la même distance que A)

Le grandissement $G_T = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -1$ (image renversée de même grandeur que l'objet)

Tous les points du diaphragme (D) sont placés dans le même plan d'onde incident, issu d'une ~~seule~~ source unique (S). En prenant comme origine des phases le point O à l'instant $t=0$, la différence de marche pour un point ~~sur~~ P de D d'abscisse X vaut pour une onde émise dans la direction θ



$\delta = OH = X \sin\theta$

d'où la différence de phase

$\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 2\pi \frac{X \sin\theta}{\lambda}$

Tous les rayons issus de (D) sous le même angle θ convergent au point M(x) tel que

$FM = x = f \tan\theta$

Pour des angles θ faibles, au voisinage de F, on a $\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta$

d'où $\varphi \simeq 2\pi \frac{X}{\lambda}\theta \simeq 2\pi \frac{X}{\lambda}\frac{x}{f} = 2\pi u X$ en posant $u = \frac{x}{\lambda f}$

En notant A l'amplitude de l'onde en F, on a ainsi

$$\psi(x) = A \int_{(D)} t(X) \exp[i\varphi(X)]\, dX = A \int_{(D)} t(X) \exp(i 2\pi u X)\, dX$$

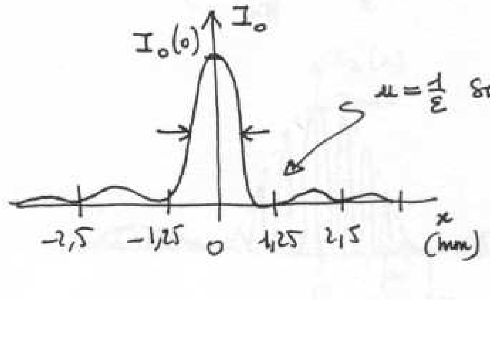
où $t(X)$ est la transmittance du diaphragme $t(X) = 0$ si obturation et $t(X) = 1$ si ouverture.

2) a) $t_0(X) = 1$ si $|X| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et 0 si $|X| > \frac{\varepsilon}{2}$

b) $\psi_0(x) = A \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{+\varepsilon/2} \exp(i2\pi u X)\, dX = \frac{A}{2i\pi u}\left[\exp(i\pi u\varepsilon) - \exp(-i\pi u \varepsilon)\right]$

$$\boxed{\psi_0(x) = A\frac{\sin(\pi u \varepsilon)}{\pi u} = A\varepsilon \operatorname{sinc}(u\varepsilon)} \quad \text{avec } \operatorname{sinc}(u\varepsilon) = \frac{\sin(\pi u \varepsilon)}{\pi u \varepsilon}$$

$$I_0 = \psi_0^* \psi_0 = |A|^2 \varepsilon^2 \operatorname{sinc}^2(u\varepsilon) = I_0(0) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\varepsilon x}{\lambda f}\right)$$



$\Delta x \simeq \frac{\lambda f}{\varepsilon} = \frac{0{,}5\times 10^{-6} \times 0{,}5}{0{,}2 \times 10^{-3}}$

$\boxed{\Delta x \simeq 1{,}25\,\text{mm}}$

3) a) $t_1(X) = 1$ si $a-\frac{\varepsilon}{2} < X < a+\frac{\varepsilon}{2}$, 0 ailleurs

$$\psi_1(x) = \int_{a-\frac{\varepsilon}{2}}^{a+\frac{\varepsilon}{2}} \exp(i 2\pi u X)\, dX$$

on pose $X' = X - a \Rightarrow dX = dX'$

$$\text{et } \psi_1(x) = \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{+\varepsilon/2} \exp[i 2\pi u (X'+a)]\, dX' = \exp(i 2\pi u a)\, \psi_0(x)$$

$$\boxed{\alpha = 2\pi u a} = 2\pi \frac{x a}{\lambda f} \qquad (\delta \simeq a\theta)$$

Correspond à la différence de phase entre l'onde émise en O et celle émise au centre de la fente F_1 (lorsque $X = a$)

b) Pour ψ_{-1}, il suffit de changer a en $-a$, soit α en $-\alpha$

$$\psi_{-1}(x) = \psi_0(x) \exp(-i 2\pi u a)$$

c) $I_1 = \psi_1 \psi_1^* = I_0 \, |\exp(i 2\pi u a)|^2 = I_0 = I_{-1}$

L'intensité ne dépend pas de la position de la fente ; elle demeure centrée au voisinage de l'image géométrique de la source qui est en ($x=0$). La figure de diffraction est inchangée.

4) a) $t_2(X) = t_1(X) + t_{-1}(X)$ et donc $A_2 = A_1 + A_{-1}$

$$A_2 = \psi_0 \left[\exp(i 2\pi u a) + \exp(-i 2\pi u a) \right] = 2 \psi_0 \cos(2\pi u a)$$

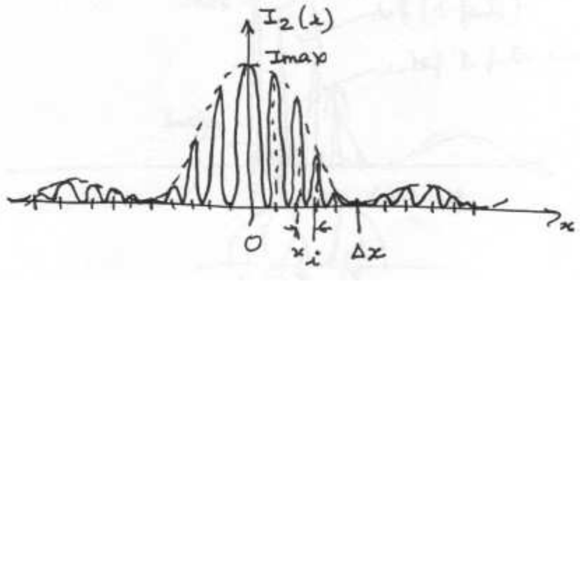
$$I_2 = 4 |\psi_0|^2 \cos^2(2\pi u a) = 4 I_0(x) \cos^2(2\pi u a)$$

$$\boxed{I_2(x) = \underbrace{|A|^2 \varepsilon^2 \,\mathrm{sinc}^2(u\varepsilon)}_{\text{terme de diffraction}} \underbrace{4\cos^2(2\pi u a)}_{\text{terme d'interférence}}}$$

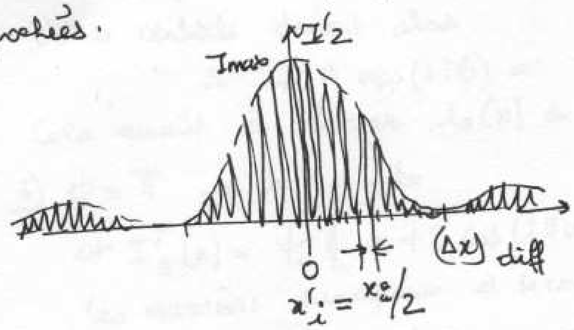
b) L'interfrange d'interférence correspond à $2\pi u_i a = \pi$

soit $u_i = \frac{1}{2a}$ et $\boxed{x_i = \lambda f u_i = \frac{\lambda f}{2a}}$

$(\Delta x)_{diff} = \frac{\lambda f}{\varepsilon} = 1{,}25 \text{ mm} \qquad \boxed{x_i = \frac{\lambda f}{2a} = \frac{\lambda f}{5\varepsilon} = 0{,}25 \text{ mm}} = \Delta x / 5$



c) la diffraction est inchangée.
La figure d'interférence est celle de deux fentes espacées de a et non de $2a$; les franges d'interférences sont deux fois plus rapprochées.



5) a) $t_3(x) = t_{-1}(x) + t_0(x) + t_1(x) \Rightarrow \psi_3(x) = \psi_{-1} + \psi_0 + \psi_1$

$$\psi_3(x) = \psi_0 \left[1 + \exp(i 2\pi u a) + \exp(-i 2\pi u a) \right]$$
$$= \psi_0 \left[1 + 2\cos(2\pi u a) \right]$$
$$I_3(x) = |\psi_0|^2(x) \left[1 + 2\cos(2\pi u a) \right]^2 = \underbrace{|A|^2 \varepsilon^2 \operatorname{sinc}^2 u\varepsilon}_{\text{terme de diffraction}} \underbrace{\left[\quad \right]^2}_{\text{terme d'interférence}}$$

(ici à 3 ondes)

$-1 \leq \cos(2\pi u a) \leq 1 \Rightarrow$ max principal pour le terme d'interférence est $(1+2)^2 = 9$ (3 ondes en phase)

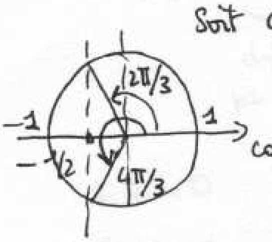
$\cancel{(I_3)_{MP} = 2\psi_0}$

$\Rightarrow$ max secondaire pour $(1-2)^2 = 1$ (2 en phase mais un en opposition de phase)

minimas nuls si $2\cos(2\pi u a) = -1$

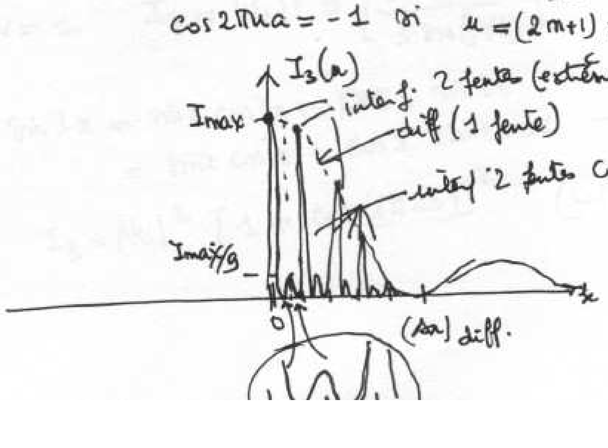
Soit $\cos(2\pi u a) = -\frac{1}{2}$ et donc $(2\pi u a) = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ (mod. 2π)

(interférence destructive)



$\cos 2\pi u a = 1$ si $u = m \frac{1}{2a} = m x_i$ (comme pour ψ_2)

$\cos 2\pi u a = -1$ si $u = (2m+1) \frac{1}{2a}$



6) le retard introduit par la lame vaut

a)
$$\delta_e \simeq n e - e = (n-1) e$$

soit une ~~retard~~ avance de phase de $\phi = (n-1) e$

l'onde centrale devient alors

$$A \longrightarrow A \exp(+i\phi)$$

Cela revient à changer $t_0(x)$ en $t_0(x)\exp(i\phi)$

b) $\phi = \pi \longrightarrow t_0 \longrightarrow -t_0$

$$\text{et } I_3'(x) = \psi_0 \left[-1 + 2\cos(2\pi u a)\right]^2$$

les maximas principaux et secondaires sont interchangés

si $\phi = 2\pi$, on ne voit aucun changement.

7) 2N+1 fentes

$$\psi = \psi_0 \left[1 + \exp(i \overbrace{2\pi u a}^{\varphi}) + \exp(-i 2\pi u a) + \exp(i 4\pi u a) + \exp(-i 4\pi u \ldots\right.$$

$$\psi = \psi_0 \sum_{n=-N}^{+N} \exp i n\varphi = \psi_0 \exp(-iN\varphi) \sum_{n=0}^{2N} \exp(in\varphi)$$

$$= \psi_0 \exp(-iN\varphi) \frac{1 - \exp[i(2N+1)\varphi]}{1 - \exp i\varphi}$$

$$= \psi_0 \frac{\exp i\varphi}{\exp i\frac{\varphi}{2}} \frac{\exp[i(N+\frac{1}{2})\varphi] - \exp[i(N+\frac{1}{2})\varphi]}{\exp(-i\frac{\varphi}{2}) - \exp(i\frac{\varphi}{2})}$$

$$\psi = \psi_0 \exp i\frac{\varphi}{2} \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})\varphi]}{\sin(\frac{\varphi}{2})}$$

$$I(x) = \underbrace{|\psi_0|^2}_{\text{diffraction par une fente}} (2N+1)^2 \underbrace{\left[\frac{\sin[(2N+1)\frac{\varphi}{2}]}{(2N+1)\sin\frac{\varphi}{2}}\right]^2}_{\text{"fonction réseau"}}$$

si $N = 0$ $\quad I_0 = |\psi_0|^2$

si $N = 1$ $\quad I_3 = |\psi_0|^2 \, 9 \left[\frac{\sin(3\varphi/2)}{3\sin(\varphi/2)}\right]^2$

$$\sin 3x = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x$$
$$= \sin x \cos 2x + \cos x \, 2\sin x \cos x = \sin x \, (1 + \cos 2x)$$

$$I_3 = |\psi_0|^2 \left[1 + \cos(2\pi u a)\right]^2 \quad \text{(OK)}$$