Université Paul Sabatier

EPREUVE D'OPTIQUE

Corrigé

Partie A : OPTIQUE GEOMETRIQUE

I. — Etude de l'oculaire

1. — Calcul des éléments T_{ij} de la matrice de transfert $\mathcal{T}(\overline{O_1O_2})$ de l'oculaire.

$$\mathcal{T}(\overline{O_1O_2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-eV_1 & e \\ -V & 1-eV_2 \end{bmatrix}$$

avec :

$$V_1 = \frac{1}{f_{i1}}, \qquad V_2 = \frac{1}{f_{i2}} \qquad \text{et} \qquad V = V_1 + V_2 - eV_1V_2$$

On obtient donc :

$$V = \frac{1}{f_{i1}} + \frac{1}{f_{i2}} - \frac{e}{f_{i1}f_{i2}} = \frac{f_{i1}+f_{i2}-e}{f_{i1}f_{i2}} = \frac{2a}{3a^2} = \frac{2}{3a}$$

$$T_{11} = 1 - eV_1 = 1 - \frac{2a}{3a} = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad T_{22} = 1 - eV_2 = 1 - \frac{2a}{a} = -1$$

d'où finalement :

$$\boxed{\mathcal{T}(\overline{O_1O_2}) = \begin{bmatrix} 1/3 & 2a \\ -2/3a & -1 \end{bmatrix}}$$

(4 x 0,5 point)

On vérifie que l'on a bien : $\det \mathcal{T}(\overline{O_1O_2}) = 1$

2. — Position des plans principaux et des plans focaux.

De l'expression de V on déduit les distances focales objet et image :

$$f_o = -\frac{1}{V} = -\frac{3a}{2} \qquad \text{et} \qquad f_i = \frac{1}{V} = \frac{3a}{2}$$

d'où les positions du foyer objet F_o par rapport à O_1 :

$$\overline{O_1F_o} = f_oT_{22} = -\frac{3a}{2}(-1) = \frac{3a}{2}$$

du foyer image F_i par rapport à O_2 :

$$\overline{O_2F_i} = f_iT_{11} = \frac{3a}{2}\frac{1}{3} = \frac{a}{2}$$

du plan principal objet H_o par rapport à O_1 :

$$\overline{O_1H_o} = f_o(T_{22} - 1) = -\frac{3a}{2}(-1-1) = 3a$$

du plan principal image H_i par rapport à O_2 :

$$\overline{O_2H_i} = f_i(T_{11} - 1) = \frac{3a}{2}(\frac{1}{3} - 1) = -a$$

En résumé :

$$\boxed{\overline{O_1F_o} = \frac{3a}{2}} \qquad \boxed{\overline{O_2F_i} = \frac{a}{2}} \qquad \boxed{\overline{O_1H_o} = 3a} \qquad \boxed{\overline{O_2H_i} = -a}$$

(4 x 0,5 points)

3. — Détermination des positions du plan focal objet et du plan principal objet par construction géométrique.

Un rayon incident qui passe (ou dont le support passe) par le foyer objet F_o d'un système centré, ressort parallèlement à l'axe optique en passant par le point C, intersection du rayon incident (ou de son support) avec le plan principal objet (cf. figure 1).

Considérons un rayon quelconque de l'espace image, parallèle à l'axe optique et interceptant la lentille $\mathcal{L}_2$ en un point B. Ce rayon est issu du rayon AB passant par le foyer objet F_{o_2} de $\mathcal{L}_2$ (cf. figure 1).

Une droite parallèle au rayon AB passant par le centre optique O_1 de la lentille $\mathcal{L}_1$, intercepte le plan focal objet de cette lentille au foyer secondaire F_{so_1}. Le rayon AB est issu du rayon $F_{so_1}A$ dont le support coupe l'axe optique au foyer objet F_o du système ainsi que le rayon parallèle à l'axe optique dans l'espace image au point C. *Le plan principal objet passe par le point C.*

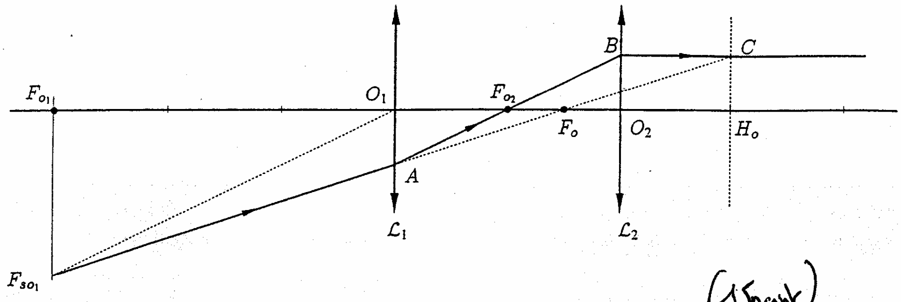


Figure 1

(1,5 point)

4. — L'oculaire est *convergent* car $V > 0$ et *positif* car $\overline{O_1F_o} > 0$ (0,5 point)

II. — Etude de la lunette astronomique

1. — La lunette est afocale si sa vergence est nulle.

$$V = \frac{1}{f_{i1}} + \frac{1}{f_{i2}} - \frac{\ell}{f_{i1}f_{i2}} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\ell = f_{i1} + f_{i2}}$$

(1 point)

Remarque : Un instrument afocal donne d'un objet à l'infini, une image à l'infini. Ceci implique que le foyer image de la lentille $\mathcal{L}_1$ coïncide avec le foyer objet de la lentille $\mathcal{L}_2$. On retrouve ainsi que $\ell = f_{i1} + f_{i2}$.

On a représenté sur le schéma de la figure 2, le trajet à travers l'instrument de deux rayons lumineux faisant un angle α_o avec l'axe optique dans l'espace objet. Les rayons émergents correspondants font un angle α_i avec l'axe optique.

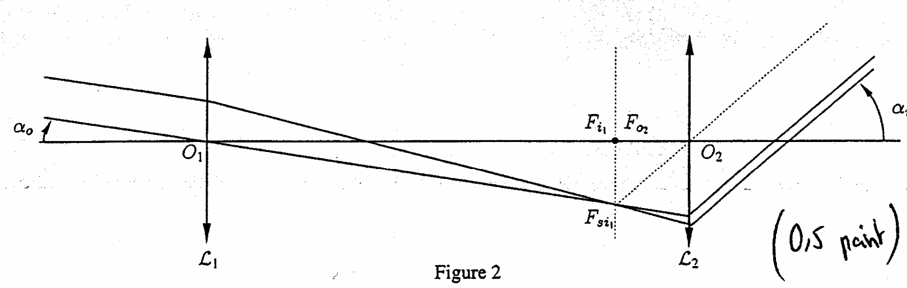


Figure 2

(0,5 point)

2. — On définit le grandissement angulaire G_a de l'instrument par le rapport :

$$G_a = \frac{\alpha_i}{\alpha_o}$$

De la figure 2, on déduit les relations algébriques :

$$\tan\alpha_i \simeq \alpha_i = \frac{\overline{F_{i1}F_{si1}}}{\overline{O_2F_{o2}}} = -\frac{\overline{F_{i1}F_{si1}}}{f_{i2}}$$

de même :

$$\tan\alpha_o \simeq \alpha_0 = \frac{\overline{F_{i1}F_{si1}}}{\overline{O_1F_{i1}}} = \frac{\overline{F_{i1}F_{si1}}}{f_{i1}}$$

ce qui donne :

$$G_a = -\frac{\overline{F_{i1}F_{si1}}}{f_{i2}} \cdot \frac{f_{i1}}{\overline{F_{i1}F_{si1}}}$$

d'où :

$$\boxed{G_a = -\frac{f_{i1}}{f_{i2}} = -25}$$

(1 point)

Si l'on désigne par θ_i et θ_o les angles sous lesquels on voit l'objet respectivement à travers l'instrument et à l'œil nu, on définit le grossissement de la lunette par le rapport :

$$G = \frac{\theta_i}{\theta_0}$$

Comme les objets visés sont à l'infini, on voit aisément que $\theta_o = \alpha_o$ et $\theta_i = \alpha_i$. Il en résulte que :

$$G_a = G = -25$$

(1 point)

L'image observée est renversée puisque le grossissement est négatif.

3. — L'application numérique donne :

$$|\alpha_o| = 0,5° = 8,73.10^{-3}\ \text{rad} \qquad \text{d'où} \qquad |\alpha_i| = 0,218\ \text{rad} = 12,5° = 12°30'$$

(0,5 point)

Partie B : OPTIQUE ONDULATOIRE

I. — Figure de diffraction d'une fente

1. — Expression de la transmittance de l'ouverture diffractante $\mathcal{D}$.

$$\underline{t}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -\frac{\varepsilon}{2} \leq x \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

(0,5 point)

2. — Si $M(x,y)$ est un point courant dans le plan de l'ouverture diffractante $\mathcal{D}$, l'amplitude complexe $\underline{\psi}_1(\vec{u},\vec{u}_0)$ de l'onde diffractée dans la direction définie par le vecteur $\vec{u}$ s'écrit, en vertu du principe d'Huygens-Fresnel :

$$\boxed{\underline{\psi}_1(\vec{u},\vec{u}_0) = \iint_{\mathcal{D}} \psi_0 \exp -i\frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u}-\vec{u}_0)\overrightarrow{OM}\, \mathrm{d}S}$$

Si α, β, γ sont les cosinus directeurs du vecteur $\vec{u}$ suivant les axes Ox, Oy, Oz et si l'onde incidente arrive normalement à la surface de l'ouverture diffractante ($\vec{u}_0.\overrightarrow{OM} = 0$), on peut encore écrire :

$$\underline{\psi}_1(\alpha,\beta) = \psi_0 \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \exp -i\frac{2\pi}{\lambda}\alpha x\, \mathrm{d}x \int_{-b/2}^{b/2} \exp -i\frac{2\pi}{\lambda}\beta y\, \mathrm{d}y$$

ce qui donne, après intégration :

$$\boxed{\underline{\psi}_1(\alpha,\beta) = \psi_0\varepsilon b \left(\frac{\sin \pi\alpha\varepsilon/\lambda}{\pi\alpha\varepsilon/\lambda}\right)\left(\frac{\sin \pi\beta b/\lambda}{\pi\beta b/\lambda}\right)}$$

(1 point)

3. — Si l'on est dans les conditions où $\varepsilon \ll b$ et $b \gg \lambda$, on a :

$$\alpha \simeq \frac{X}{f_{i1}} \qquad \text{et} \qquad \beta \simeq \frac{Y}{f_{i1}}$$

d'où l'on déduit que :

$$\boxed{I_1(X,Y) = \psi_0^2\varepsilon^2 b^2 \left[\frac{\sin \frac{\pi\varepsilon X}{\lambda f_{i1}}}{\frac{\pi\varepsilon X}{\lambda f_{i1}}}\right]^2 \left[\frac{\sin \frac{\pi b Y}{\lambda f_{i1}}}{\frac{\pi b Y}{\lambda f_{i1}}}\right]^2}$$

(1 point)

Si $b \gg \lambda$, alors $\dfrac{\sin \frac{\pi b Y}{\lambda f_{i1}}}{\frac{\pi b Y}{\lambda f_{i1}}} = 0$ sauf pour les points correspondant à $Y = 0$. Pour ces points, $\dfrac{\sin \frac{\pi b Y}{\lambda f_{i1}}}{\frac{\pi b Y}{\lambda f_{i1}}} = 1$

Il en résulte donc que $I(P) = 0$ en tous points $Y \neq 0$. Si l'on pose :

$$\delta(Y) = 0 \quad \text{si} \quad Y \neq 0 \quad \text{et} \quad \delta(Y) = 1 \quad \text{si} \quad Y = 0$$

on peut donc écrire :

$$\boxed{I_1(X,Y) = \psi_0^2\varepsilon^2 b^2 \delta(Y) \left[\frac{\sin \frac{\pi\varepsilon X}{\lambda f_{i1}}}{\frac{\pi\varepsilon X}{\lambda f_{i1}}}\right]^2 = I_0 \left[\frac{\sin \pi A X}{\pi A X}\right]^2}$$

avec :

$$\boxed{I_0 = \psi_0^2\varepsilon^2 b^2 \delta(Y)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{A = \frac{\varepsilon}{\lambda f_{i1}}}$$

(1,5 point)

II. — Pouvoir de résolution de la lunette

1. — Lorsque l'ouverture diffractante $\mathcal{D}$ est éclairée par une onde plane de vecteur d'onde $\vec{k}_0 = 2\pi\vec{u}_0/\lambda$, l'amplitude complexe $\underline{\psi}_1$ de l'onde diffractée dans la direction définie par le vecteur $\vec{u}$ s'écrit :

$$\boxed{\underline{\psi}_1(\vec{u}, \vec{u}_0) = \iint_{\mathcal{D}} \psi_0 \exp -i\frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u} - \vec{u}_0)\overrightarrow{OM}\, \mathrm{d}S}$$

(1 point)

2. — Après intégration sur l'ouverture $\mathcal{D}$ on obtient :

$$\boxed{I_1(X, Y) = \psi_0^2 \varepsilon^2 b^2 \left[\frac{\sin \dfrac{\pi\varepsilon(\alpha - \alpha_0)}{\lambda}}{\dfrac{\pi\varepsilon(\alpha - \alpha_0)}{\lambda}}\right]^2 \left[\frac{\sin \dfrac{\pi b(\beta - \beta_0)}{\lambda}}{\dfrac{\pi b(\beta - \beta_0)}{\lambda}}\right]^2}$$

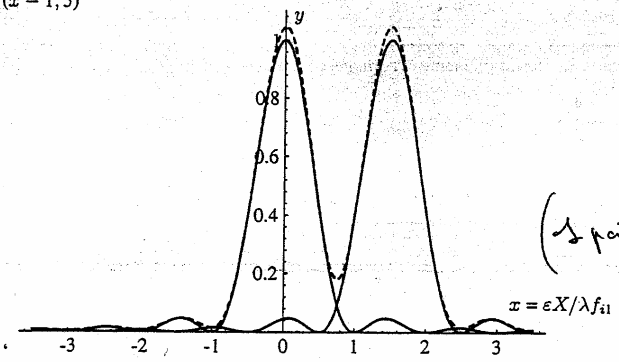
(1 point)

3. — Si l'on est dans les conditions où $\varepsilon \ll b$ et $b \gg \lambda$, on a encore :

$$\boxed{I_2(X, Y) = \psi_0^2 \varepsilon^2 b^2 \delta(Y) \left[\frac{\sin \pi B\left(\frac{X}{\delta} - f_{i1}\right)}{\pi B\left(\frac{X}{\delta} - f_{i1}\right)}\right]^2} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{B = \frac{\varepsilon\delta}{\lambda f_{i1}}}$$

(1 point)

4. — On a représenté sur la figure 3, en fonction de $x = \varepsilon X/\lambda f_{i1}$, la fonction $I_1(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$ (courbe en trait plein centrée sur l'axe Oy), la fonction $I_2(x) = \dfrac{\sin \pi(x - 1,5)}{\pi(x - 1,5)}$ (courbe en trait plein décalée) et la fonction $I(x) = I_1(x) + I_2(x)$, (courbe en pointillés).



(1 point)

Figure 3

Applications numériques :

Position du maximum principal de I_1 : $X = 0$.

Position du premier maximum secondaire de I_1 : $X \simeq \dfrac{3\lambda f_{i1}}{2\varepsilon} = 7,5.10^{-4}$ m.

Intensité relative du premier maximum secondaire de I_1 : $I_1/I_0 \simeq 0,045$.

Position du maximum principal de I_2 : $X = \delta f_{i1} = 7,5.10^{-4}$ m.

Demi-largeur à la base des maxima principaux : $\dfrac{\lambda f_{i1}}{\varepsilon} = 5.10^{-4}$ m.

5. — Les deux étoiles S_1 et S_2 constituent des sources incohérentes. L'intensité résultante $I(X)$ est donc égale à la somme des intensités :

$$I(X) = I_1(X) + I_2(X)$$

(1 point)

6. — On obtient la plus petite valeur détectable selon le critère de Rayleigh lorsque le maximum principal de I_2 coïncide avec le premier minimum nul de I_1 ou encore lorsque la distance ℓ entre les deux maxima principaux est égale à la demi-largeur à la base d'un maximum principal. On a donc :

$$\boxed{\ell_{\min} = \delta f_{i1} = \frac{\lambda f_{i1}}{\varepsilon}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\delta = \frac{\lambda}{\varepsilon} = 5.10^{-4}\ \text{rad}}$$

(1 point)