UNIVERSITE PAUL SABATIER **Année 2006/07**
Licence L2S3

Optique ondulatoire
TD n°5 : Ondes et vibrations

I - Vibrations monochromatiques.

1. On considère les vibrations monochromatiques suivantes :

a) $V_1(t) = 3\cos(12\pi t)$

b) $V_2(t) = -5\cos(12\pi t - \pi/4)$

c) $V_3(t) = 5\sin(12\pi t - 10)$

Donner les caractéristiques (amplitude, fréquence, période, retard de phase et de temps des vibrations 2 et 3 par rapport à la première). Exprimer les phases en radians et en degrés.

2. Ecrire dans les trois cas précédents l'expression des amplitudes complexes associées $\underline{V}(t)$ et $\mathrm{d}\underline{V}/\mathrm{d}t$.

II - Onde scalaire monochromatique plane.

Une onde monochromatique présente en un point M (OM = **r**) l'amplitude complexe :

$$\Psi(\mathbf{r},t) = A\exp\{-i[\omega t - \phi(\mathbf{r})]\}$$

1. Définir les divers paramètres physiques. Exprimer la relation entre pulsation et fréquence.

2. Dans le cas où $\phi(\mathbf{r}) = 3x + 4y + 5z$, préciser le vecteur d'onde **k** associé ; quelles sont les surfaces d'ondes ? Exprimer $k = \|\mathbf{k}\|$ en fonction de la longueur d'onde dans le vide λ_0 et de la longueur d'onde λ dans le milieu de propagation, d'indice *n*.

3. Vérifier que $\Psi(\mathbf{r},t)$ satisfait à l'équation de propagation.

4. Donner l'expression de l'amplitude $\Psi(\mathbf{r},t)$ de l'onde lorsque celle-ci se propage dans une direction normale à l'axe O*y* et faisant un angle de 30° avec l'axe O*z*.

5. On suppose maintenant une onde monochromatique telle que le plan $z = z_1$ soit une surface d'onde. Déduire les composantes du vecteur $\mathbf{u} = \mathbf{k}/k$. Exprimer la phase et l'amplitude complexe de l'onde dans le plan $z = z_1$ puis dans le plan $z = z_2 = z_1 + d$. En déduire la différence de phase entre ces deux plans en fonction de λ_0, *n* et *d*.

6. On donne λ_0 = 632,8 nm. L'origine des phases est prise en $z = z_1$ et la propagation a lieu dans l'air ($n = 1$). Quelle est la phase en $z_2 = z_1 + 6328$ nm, $z_2 = z_1 + 1580$ nm, $z_2 = z_1 + 1423{,}8$ nm ?

III - Quelques fonctions et leurs spectres

1. On définit les fonctions $\mathrm{rect}(x)$ et $\mathrm{sinc}(x)$ et représenter leurs graphes.

2. On définit la représentation spectrale $\underline{V}(\nu)$ d'une fonction du temps $V(t)$ par

$$\underline{V}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t)\exp(i2\pi\nu t)\,\mathrm{d}t$$

On considère la fonction $V(t) = \mathrm{rect}(t/\tau)$.

a) Vérifier que $\underline{V}(\nu) = \mathrm{sinc}(\nu\tau)$.

b) Tracer le graphe de l'intensité spectrale (ou spectre) définie selon : $I(\nu) = |\underline{V}(\nu)|^2$.

3. On considère la vibration quasi-monochromatique tronquée :

$$V_1(t) = A_0\mathrm{rect}(t/\tau)\cos(2\pi\nu_0 t)$$

a) Représenter graphiquement cette fonction.

b) Déterminer sa représentation spectrale.

c) Représenter graphiquement l'intensité spectrale.

d) Etablir la relation entre la durée τ et la largeur à mi-hauteur $\Delta\nu_{1/2}$ de l'intensité spectrale.

4. ►*Travail personnel :* On considère la vibration quasi-monochromatique amortie exponentiellement :

$$V_2(t) = A_0(t)\cos(2\pi\nu_0 t)$$

où $A_0(t)$ est la fonction du temps définie selon :

$$A_0(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \text{ et } A_0(t) = A_0 \exp(-t/\tau) \text{ pour } t > 0 .$$

a) Représenter graphiquement cette fonction.

b) Déterminer sa représentation spectrale.

c) Représenter graphiquement l'intensité spectrale.

d) Etablir la relation entre la durée τ et la largeur à mi-hauteur $\Delta\nu_{1/2}$ de l'intensité spectrale.

IV - Superposition de deux vibrations.

Quelle est l'amplitude A_r et le retard de phase ϕ_r de la vibration résultant de la superposition à un instant t donné en un point $\mathbf{r}$ donné, des deux vibrations suivantes : $V_1(t) = A_1\cos[\omega t - \phi_1(\mathbf{r})]$ et $V_2(t) = A_2\cos[\omega t - \phi_2(\mathbf{r})]$?

On établira le résultat par la méthode trigonométrique, puis par la méthode complexe.

V - Superposition de deux ondes sphériques.

Deux sources ponctuelles S_1 et S_2 de coordonnées respectives (0,0,a/2) et (0,0,-a/2), émettent des ondes sphériques monochromatiques synchrones, de longueur d'onde λ, de pulsation ω, ayant même phase à l'origine ϕ_0 et même amplitude.

On considère un point M de l'espace et on pose :

$$r = \|\mathbf{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad r_1 = \|\mathbf{S_1M}\| \quad \text{et } r_2 = \|\mathbf{S_2M}\|$$

Les amplitudes des ondes est alors notée respectivement A_0/r_1 et A_0/r_2.

1. Représenter l'aspect géométrique de la situation.

2. Déterminer l'état vibratoire résultant $\Psi(M, t)$ au point M

3. Que devient $\Psi(M, t)$ lorsque $r >> a$?

4. Calculer l'intensité de l'onde résultante en M en fonction de r, A_0 et $\phi(M) = 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda$.

5. Exprimer $\phi(M)$ en tout point M d'un plan orthogonal à l'axe Oy situé à une distance D de l'origine du repère, sachant que $x << D$ et $z << D$. Quels sont les lieux d'égale intensité ? Quelle est la distance entre deux lieux adjacents ?

6. ►*Travail personnel :* Montreer que :

$$\phi(M) = 2\pi\frac{a}{\lambda}\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2D^2}\right)$$

en tout point M d'un plan orthogonal à l'axe Oz situé à une distance D de l'origine du repère, sachant que $y << D$ et $x << D$. Quels sont les lieux d'égale intensité ?

Rappel : $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon \quad pour \quad \varepsilon << 1$