UNIVERSITE PAUL SABATIER
TOULOUSE III

Licence Physique Chimie et Applications
Mention physique
L2

année 2004/2005

Examen de Physique Quantique

Session de Septembre

Durée 1h30 – tous documents interdits

EXERCICE

1. Rappeler sans démonstration la valeur des énergies E_n autorisées pour une particule de masse m placée dans un puits de potentiel infiniment profond et de largeur a.

2. Calculer l'écart relatif en énergie $\frac{\delta E_n}{E_n}=\frac{E_{n+1}-E_n}{E_n}$ entre deux niveaux consécutifs.

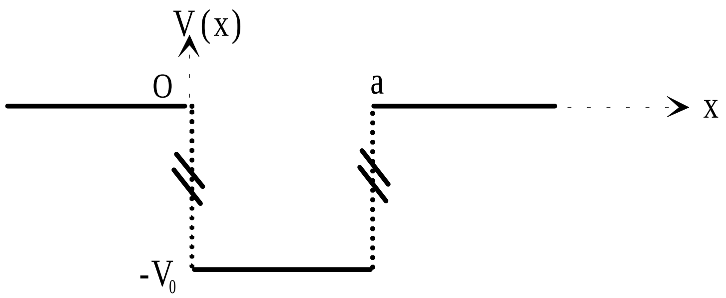
3. Calculer la valeur de n pour une bille de *1 gr* placée dans un puits de *10 cm* de largeur et qui possède une énergie de *25,8 meV*.

4. Que vaut alors $\frac{\delta E_n}{E_n}$ pour cette bille ? Y-a t'il lieu de distinguer ce résultat de celui donné par la physique classique (niveaux d'énergie continus). On rappelle la constante de Planck : $h = 6{,}62\ 10^{-34}\ J\ s$.

PROBLEME

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Dans ce problème, on s'intéresse aux résultats que peut donner une mesure de la position ou de l'impulsion d'une particule située dans un puits de potentiel infini (voir figure ci-contre avec $E_n << V_0$).



Outre l'énergie des états stationnaires demandée précédemment, on rappelle les fonctions d'onde normalisées associées :

$$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

1. Mesure de l'impulsion

Considérons une particule préparée dans l'état stationnaire $\varphi_n(x)$ dont on rappelle qu'il ne constitue pas un état propre de l'opérateur $\hat{p}_x$ associé à l'impulsion.

a. Rappeler la forme mathématique de l'opérateur $\hat{p}_x$.

b. Après avoir rappelé sa définition, calculer la valeur moyenne de l'impulsion $\langle p_x \rangle$ de la particule pour l'état stationnaire $\varphi_n(x)$.

c. Même question pour l'écart quadratique moyen Δp_n. On rappelle que cet écart est défini par $\Delta p_n=\sqrt{\langle p_x^2\rangle-\langle p_x\rangle^2}$.

2. **Mesure de la position**

On suppose maintenant qu'à l'instant initial $t=0$, le système a été préparé dans l'état $\Psi(x,0)=C\left(\Psi_1(x,0)+\Psi_2(x,0)\right)=C\left(\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\right)$. On rappelle que le potentiel étant stationnaire, les états $\Psi_n(x,t)$ se mettent sous la forme $\Psi_n(x,t)=\varphi_n(x)exp\left(-iE_nt/\hbar\right)$.

a. Après avoir déterminé la valeur de C pour que l'état soit normalisé, calculer l'état $\Psi(x,t)$. Montrer qu'il peut s'écrire en fonction de la quantité ω_{21} tel que $\hbar\omega_{21}=\left(E_2-E_1\right)$. Préciser la dimension physique de ω_{21}.

b. Montrer que la valeur moyenne de la position de la particule à l'instant t, $<x>(t)$ vaut : $\langle x\rangle(t)=\frac{a}{2}-\frac{16a}{9\pi^2}cos\left(\omega_{21}t\right)$. Il sera commode de plutôt considérer le changement de variable $x'=x-\frac{a}{2}$, et il conviendra également de réfléchir -avant de se précipiter dans les calculs- à la parité des nouvelles fonctions à intégrer ainsi obtenues !

c. Comparer graphiquement le résultat précédent à celui obtenu pour une particule classique effectuant un mouvement – que l'on précisera- de même période.

d. **Hors-barème :** Calculer l'écart quadratique moyen ΔH de l'énergie de la particule dans l'état $\Psi(x,t)$.

e. **Hors-barème :** Montrer que l'ensemble de vos résultats vérifie bien la relation d'incertitude de Heisenberg, soit $\Delta E.\Delta t\sim\hbar$.

On donne $\int sin^2x\,dx=\frac{x}{2}-\frac{sin2x}{4}$ et $\int_0^a x\,sin\frac{\pi x}{a}sin\frac{2\pi x}{a}dx=-\frac{8a^2}{9\pi^2}$.