Partiel de PHYSIQUE QUANTIQUE

Exo 1) 1) $\lambda = \frac{h}{p}$ (1) de Broglie $\qquad E = \frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow p = \sqrt{3 m k_B T}$

soit $\lambda = \frac{h}{\sqrt{3 m k_B T}}$ (1) $\qquad h = 6{,}62\ 10^{-34}\ \mathrm{J.s}$, $k_B = 1{,}38\ 10^{-23}\ \mathrm{J K^{-1}}$, $T = 300\ \mathrm{K}$

$m = \frac{M}{\mathcal{N}} = 5{,}31\ 10^{-26}\ \mathrm{kg}$

$\Rightarrow$ AN: $\lambda = \frac{6{,}62\ 10^{-34}}{\sqrt{3 \times 5{,}31\ 10^{-26} \times 1{,}38\ 10^{-23} \times 300}} = 0{,}26\ \mathring{A}$ (1)

2) $\lambda_{\text{neutron thermique}} = 1{,}45\ \mathring{A}$ (1,5) $\Rightarrow$ oui effet quantique car m̂ ordre de grandeur que distance réticulaire. (1,5)

Exo 2) États liés $(E < V_0)$

1) Potentiel stationnaire $\Rightarrow \psi(x,t) = \varphi(x)\, e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

Région I : $\frac{\partial^2 \varphi_I(x)}{\partial x^2} - \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}_{= K^2} \varphi_I(x) = 0$ (1,5) $\quad ; \; K^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$

Région II : $\frac{\partial^2 \varphi_{II}(x)}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{= k^2} \varphi_{II}(x) = 0$ (1,5) $\quad ; \; k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

Région III : $\frac{\partial^2 \varphi_{III}(x)}{\partial x^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\varphi_{III}(x) = 0 \quad ; \; K^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$

2) Forme g$^{\text{le}}$ des solution.

Région I : $\varphi_I(x) = A_I e^{Kx} \cancel{(+ B_I e^{-Kx})}$ (1) $x \leq 0$

Région II : $\varphi_{II}(x) = A_{II} e^{ikx} + B_{II} e^{-ikx}$ (1) $0 \leq x \leq a$

Région III : $\varphi_{III}(x) = \cancel{(A_{III} e^{Kx})} + B_{III} e^{-Kx}$ (1) . $x \geq a$.

X ≡ proba bornée en $+\infty$

3) Puits profondeur infinie $\Rightarrow \varphi_I(x) = \varphi_{III}(x) = 0$ (1) (soit $A_I = B_{III} = 0$)

et donc $\varphi_{II}(x) = A_{II} e^{ikx} + B_{II} e^{-ikx}$ (0,5) avec $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

Continuité de $\varphi(x)$ aux interfaces $\quad \varphi_I(0) = 0 = \varphi_{II}(0)$ (1)

$\varphi_{II}(a) = 0 = \varphi_{III}(a)$

$$\Rightarrow A_{II} + B_{II} = 0 \quad \text{soit} \quad B_{II} = -A_{II}$$

$$\Rightarrow \varphi_{II}(x) = A_{II}(e^{ikx} - e^{-ikx}) = A\sin(kx) \quad 1{,}5$$

⚠ k est quantifié

Démonstration : continuité de $\varphi(x)$ en $x = a$. $\quad A_{II}(e^{ika} - e^{-ika}) = 0 \Rightarrow \sin(ka) = 0$

soit $k_\ell a = \ell\pi$

ou $k_\ell = \ell\dfrac{\pi}{a}$ 1

Finalement $\quad \varphi_{II}(x) = A\sin(k_\ell x)$ avec $k_\ell = \dfrac{\ell\pi}{a}$.

ℓ entier $\mathbb{N}^*$

$$k_\ell^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E_\ell \Rightarrow E_\ell = \frac{\hbar^2 k_\ell^2}{2m} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\ell^2 \quad 1$$

4) <u>Normalisation</u> $\quad \rho(x) = |\varphi(x)|^2$ 1

$$\int_{\forall x} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{0} \cancel{|\varphi_I(x)|^2} dx + \int_0^a |\varphi_{II}(x)|^2 dx + \int_a^{\infty} \cancel{|\varphi_{III}(x)|^2} dx = 1$$

$$\text{soit} \int_0^a |A|^2 \sin^2(k_\ell x)\, dx = 1 = \int_0^a |A| \times \frac{(1 - \cos(2k_\ell x))}{2} dx$$

$$= |A|^2 \frac{a}{2} \Rightarrow |A| = \sqrt{\frac{2}{a}} \quad 1$$