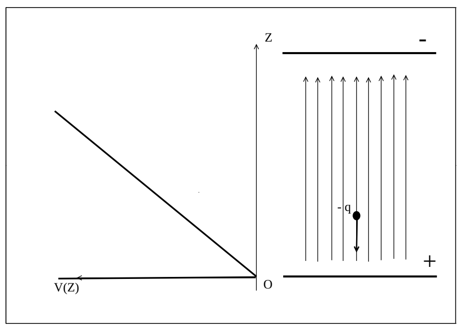
Université Paul Sabatier, Licence Physique Chimie et Application - L2 Physique

Examen de mécanique quantique
5 juin 2007 (durée 1h30)

I. QUESTIONS DE COURS (5 PTS)

1. Citer une expérience mettant en évidence le caractère *ondulatoire* de la matière. La commenter brièvement avec un schéma à l'appui.
2. Citer une expérience mettant en évidence le caractère *corpusculaire* de la lumière. La commenter brièvement avec un schéma à l'appui.
3. Quelle relation fondamentale de la mécanique quantique a permis de faire le lien entre ces deux caractères ? On précisera la signification des différents termes de cette relation.

II. QUANTIFICATION DANS UN POTENTIEL LINÉRAIRE (15 PTS)



Un électron (charge $-q$) est astreint à se déplacer verticalement le long d'un axe Oz. Il est soumis à l'action d'un champ électrique d'amplitude ξ ascendant, créé entre les armatures d'un condensateur plan (voir figure). L'armature supérieure chargée négativement est supposée située à l'infini (en z $= \infty$). L'armature inférieure (positive) est supposée infranchissable : $V(z) = \infty$ pour z ≤ 0. L'énergie potentielle de l'électron est linéaire en z : $V(z) = q\xi z$. On se propose de déterminer les états stationnaires de l'électron ainsi que leurs énergies.

1. Que représentent les flèches ascendantes et la flèche descendante sur la figure ci-dessus ?
2. Rappeler l'équation de Schrödinger dépendante du temps. Quelle forme prend-t-elle pour un état stationnaire ?
3. Ecrire le hamiltonien de l'électron soumis au champ électrique ξ ainsi que l'équation de Schrödinger permettant de déterminer les fonctions d'ondes électroniques $\psi(z)$ et les énergies E associées .
4. Quelles sont les deux conditions aux limites que doivent satisfaire les fonctions d'ondes $\psi(z)$ compte tenu de la forme du potentiel électrostatique.
5. En posant $z = z_0\alpha$ et $E = \beta E_0$ réécrire l'équation de Schrödinger en fonction des quantités sans dimension α et β , montrez qu'elle se met sous la forme

$$-\frac{\partial^2\psi(\alpha)}{\partial\alpha^2} + \alpha\psi(\alpha) = \beta\psi(\alpha) \tag{1}$$

si $z_0 = (\frac{\hbar^2}{2mq\xi})^{\frac{1}{3}}$ et $E_0 = (\frac{\hbar^2 q^2 \xi^2}{2m})^{\frac{1}{3}}$

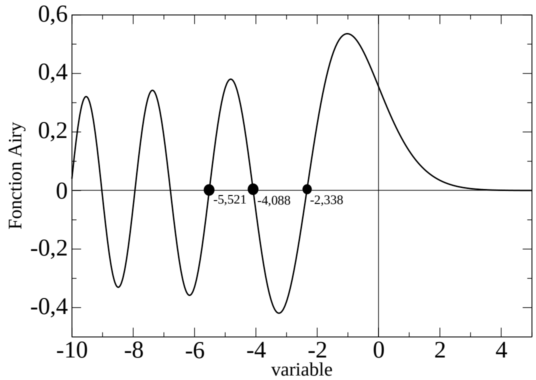
6. En utilisant la translation $\delta = \alpha$ - β l'équation (1) devient

$$\frac{\partial^2 u(\delta)}{\partial\delta^2} - \delta u(\delta) = 0 \tag{2}$$

avec $\psi(\alpha) = u(\delta)$.

Justifier les conditions aux limites $u(\infty) = 0$ et $u(-\beta) = 0$ auxquelles doivent satisfaire les solutions $u(\delta)$.

Les solutions $u(\delta)$ de l'équation (2) sont les fonctions d'Airy. Celle qui satisfait à la condition $u(\infty) = 0$ est représentée sur la figure ci-joi



7. Les premier zéros de la fonction d'Airy sont donnés par $\delta_1 = -2.338$, $\delta_2 = -4.088$, $\delta_3 = -5.521$, etc. (voir le tracé de la fonction). A partir de ces valeurs, donner les expressions des trois premiers niveaux d'énergie de ce système.
8. Calculer la séparation en énergie entre les deux premiers niveaux pour un champ $\xi = 5\,10^6\,V/m$. Quelle est la longueur d'onde émise lors d'une transition entre ces deux niveaux ?
9. Evaluer z_0 qui donne l'ordre de grandeur de la hauteur à laquelle se trouve l'électron au dessus de l'armature du condensateur.
10. Grâce à des techniques de manipulation de neutrons ultrafroids on peut observer les états stationnaires de neutrons, dans le champ de pesanteur, situés au dessus d'un miroir. En s'appuyant sur les résultats précédents et en remplaçant l'énergie potentielle électrostatique par l'énergie potentielle gravitationnelle, déterminer les trois premiers niveaux quantifiés des neutrons dans le champ de pesanteur.

III. DONNÉES

Constante de Planck h : 6,62 10^{-34} J.s
Vitesse de la lumière : 3 10^8 m/s
Masse de l'électron : 9,1 10^{-31} kg
Masse du neutron : 1,675 10^{-27} kg
Charge de l'électron : 1,6 10^{-19} C
Accélération de la pesanteur : 9,8 m/s^2