UNIVERSITE PAUL SABATIER
TOULOUSE III

année 2004/2005

Licence Physique Chimie et Applications
Mention physique
L2

EXAMEN DE PHYSIQUE QUANTIQUE

Durée : 1h30

I-Etats stationnaires de l'oscillateur harmonique:

On rappelle que l'Hamiltonien associé à un oscillateur harmonique d'axe (Ox), de masse m et de pulsation propre ω est donné par :

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

1-On considère la fonction d'onde $\Psi_0(x,t) = \phi_0(x)\exp\left(-i\frac{E_0}{\hbar}t\right)$, avec $\phi_0(x) = \left(\frac{1}{\pi b^2}\right)^{1/4}\exp\left(\frac{-x^2}{2b^2}\right)$.

On admettra (sans le démontrer) que la fonction d'onde $\phi_0(x)$ est normée. Vérifiez que cette fonction d'onde est solution de l'équation de Schrödinger pour les états stationnaires, à condition que la constante b ait une valeur que l'on déterminera en fonction de m, ω et $\hbar$.

2-Quelle est, en fonction de ω et $\hbar$, l'énergie E_0 de cet état stationnaire ?

3-Quelle est la dimension de la constante b (justifiez votre réponse) ?

4-On considère la fonction d'onde $\Psi_1(x,t) = \phi_1(x)\exp\left(-i\frac{E_1}{\hbar}t\right)$ avec $\phi_1(x) = \left(\frac{4}{\pi b^6}\right)^{1/4} x.\exp\left(\frac{-x^2}{2b^2}\right)$.

On admettra (sans le démontrer) que la fonction d'onde $\phi_1(x)$ est normée. Vérifiez que cette fonction d'onde est solution de l'équation de Schrödinger pour les états stationnaires si la constante b a la même valeur que celle déterminée à la question 1.

5-Déduisez l'énergie E_1 de cet état en fonction de ω et $\hbar$.

6-Application numérique : calculez b sachant que $m = 1{,}67\times10^{-27} kg$ et $\omega = 2{,}52\times10^{11} rad.s^{-1}$

7-Calculez les densités de probabilité de présence $\rho_0(x)$ et $\rho_1(x)$ correspondant aux états stationnaires décrits par $\phi_0(x)$ et $\phi_1(x)$, en fonction de x et de b.

8-Représentez succinctement les fonctions $\rho_0(x)$ et $\rho_1(x)$.

II-Etat non stationnaire de l'oscillateur harmonique:

1-Montrez que la fonction d'onde $\Psi(x,t) = \frac{\Psi_0(x,t) + \Psi_1(x,t)}{\sqrt{2}}$ est solution de l'équation de Schrödinger dépendant du temps.

2-Montrez également que cette fonction d'onde n'est pas solution de l'équation de Schrödinger pour les états stationnaires.

3-La fonction d'onde $\Psi(x,t)$ est-elle normée ?

4-Montrez que la densité de probabilité de présence de la particule pour l' état $\Psi(x,t)$ est de la forme $\rho(x,t)=f_1(x)+f_2(x)\cos(\omega_{01}t)$. Donnez l'expression de la pulsation ω_{01} en fonction de la pulsation propre ω de l'oscillateur, ainsi que l'expression des fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ en fonction du paramètre b et de la variable x.

6-Calculer $\langle \mathrm{x}(\mathrm{t})\rangle$, valeur moyenne de x pour l'état $\Psi(x,t)$, en fonction de b, ω_{01} et t.

7-Représenter graphiquement $\langle \mathrm{x}(\mathrm{t})\rangle$.

On donne : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp(-x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$