L2 Physique - 2007-2008 - 2ème session. Barème Electromagnétisme.

I. Cours 3pts

1. Maxwell-Faraday : forme intégrale : $\oint_C \vec{E}.d\vec{r} + \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\vec{n}\, dS = 0$. (1pt)
Où C est un contour quelconque et S une surface s'appuyant sur C.
forme locale : $\vec{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$. (1pt)

2. $\vec{R} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ (1pt)

II. Barreau glissant sur les rails.

1. $\vec{v} \wedge \vec{B}_a = v.\vec{e_x} \wedge B\vec{e_z} = v.B\underbrace{(\vec{e_x}\wedge\vec{e_z})}_{-\vec{e_y}} = -v.B\,\vec{e_y}$ (1pt)

2. $e = \oint_C (\vec{v}\wedge\vec{B_a}).d\vec{r} = \int_{MN} (-v.B\vec{e_y}).d\vec{r} = -v.B.L$ (1pt)

3. $e = -\frac{d}{dt}\underbrace{(B.L.x)}_{flux} = -BL\frac{dx}{dt} = -v\,BL$. (1pt)

$e = -\iint_S \underbrace{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{0}.\vec{n}\,dS + \oint_{\mathscr{C}} (\vec{v}\wedge\vec{B}).d\vec{r} = \int_{MN} (\vec{v}\wedge\vec{B}).d\vec{r}$ (1pt)

4. $e = r\,i \Rightarrow i(t) = \frac{e(t)}{r} = -\frac{BL}{r}v(t) < 0$ (1pt) avec la convention de la figure 1, ce qui donne une force de Laplace qui s'oppose au mouvement (loi de Lenz)

5. $\vec{F_L} = -B.i(t).L\,\vec{e_x}$ $\left(\text{car } \int_{MN} i(t)\,d\vec{r}\wedge\vec{B}\right)$ (1pt)

III Effet de peau. 5pts

1. $rot[\underline{E}(z)e^{i\omega t}] = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = -i\omega\,\underline{B}(z)\,e^{i\omega t} \Rightarrow rot\,\underline{E}(z) = -i\omega\,\underline{B}(z)$ (1pt)

$\underbrace{div\,\underline{E}(z) = div\,\underline{B}(z) = 0}_{(1pt)}$ et $\vec{rot}[\underline{B}(z)e^{i\omega t}] = \mu_0\left(\gamma\underline{E} + \varepsilon_0\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}\right)$

$\Rightarrow \vec{rot}\,\underline{B}(z) = \mu_0(\gamma + i\varepsilon_0\omega)\,\underline{E}(z)$ (1pt)

$\vec{rot}(\vec{rot}\,\underline{E}(z)) = -i\omega.\vec{rot}\,\underline{B}(z) = \vec{grad}\underbrace{(div\,\underline{\vec{E}})}_{0} - \Delta\vec{\underline{E}}(z) \underset{(4)}{=} -i\omega\,\mu_0(\gamma + \underbrace{i\varepsilon_0\omega}_{\text{négligé}})\underline{E}(z)$

(1pt) $\Delta\vec{\underline{E}}(z) = \frac{2i}{\delta^2}\vec{\underline{E}}(z)$ et de même (1pt) $\Delta\vec{\underline{B}}(z) = \frac{2i}{\delta^2}\vec{\underline{B}}(z)$.

4pts

2. Equation caractéristique de ces équations différentielles : $r^2 = \frac{2i}{\delta^2}$
de racines $r_1 = \frac{1+i}{\delta}$ et $r_2 = -\frac{1+i}{\delta} \Rightarrow \vec{\underline{B}}(z) = \vec{A}\exp\left[(1+i)\frac{z}{\delta}\right] + \vec{A'}\exp\left[-(1+i)\frac{z}{\delta}\right]$ (1pt)
où $\vec{A}$ et $\vec{A'}$ sont des constantes vectorielles. $\vec{A} = \vec{0}$ pour que $\vec{\underline{B}}$ reste fini lorsque $z \to \infty$, donc $\vec{\underline{B}}(z) = \vec{A'}\exp -\frac{z}{\delta}.\exp -i\frac{z}{\delta}$ (1pt)

3. $\vec{\underline{B}} = B(0).\vec{e_y}.e^{-z/\delta}.e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})}$ (1pt) et $\vec{B} = B(0).\vec{e_y}.e^{-z/\delta}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$ (1pt)

L2 Physique - 2007-2008 - 2ème session - Barème Électromagnétisme

III.4. L'équation (4) $\Rightarrow \underline{\vec{E}}(z) \simeq \frac{1}{\mu_0 \gamma}\left[\mathrm{rot}\,\underline{\vec{B}}(z)\right] = \frac{1}{\mu_0\gamma}\left[-\frac{d\underline{B}(z)}{dz}\right].\vec{e_x}$ (1pt)

se réduit à

Soit $\underline{\vec{E}}(z) = \frac{1+i}{\delta\mu_0\gamma}.\vec{e_x}\,B(0).e^{-z/\delta}.\exp(-i\frac{z}{\delta})$ (1pt)

et $\vec{E}(z) = \frac{\sqrt{2}}{\delta\mu_0\gamma}.\vec{e_x}\,B(0)\cdot e^{-z/\delta}.\cos(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4})$ (1pt)

5pts

5. $\vec{R} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\wedge\vec{B} = \frac{\sqrt{2}}{\delta\mu_0^2\gamma}B(0)^2\cos\omega t.\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$ en $z=0$.
(0,5pt)
(plan xOy)

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est :

$\langle\vec{R}\rangle = \frac{1}{2}.\frac{B(0)^2}{\delta\mu_0^2\gamma}.\vec{e_z}$ car $\langle\cos\omega t.\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ (1pt)

Le flux est donc $S\times|\langle\vec{R}\rangle| = \frac{1}{2}.\frac{B(0)^2}{\delta\mu_0^2\gamma}S$. C'est la puissance moyenne fournie par le champ électromagnétique au milieu, à travers la surface S. (1pt)