L2 - Electromagnétisme.

II.1.1. Invariance par rotation/axe et translation selon z + Théorème d'Ampère $\Rightarrow \vec{B}_1(\cancel{z},y) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y}(-\vec{e}_x)$ A et $\vec{B}_2(\cancel{z},y) = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(b-y)}(-\vec{e}_x)$ B.

2. $\phi_1 = \int_{\text{Spire}} \vec{B}_1 \cdot \underbrace{\vec{n}}_{-\vec{e}_x} \cdot dS = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \int_{Sp.} \frac{a \cdot dy}{y}$ C $= \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi}\left[\ln y\right]_{y_0-\frac{a}{2}}^{y_0+\frac{a}{2}} = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{y_0+\frac{a}{2}}{y_0-\frac{a}{2}}\right) > 0$ D

$\phi_2 = \int_{Sp.} \vec{B}_2 \cdot \underbrace{\vec{n}}_{-\vec{e}_x} \cdot dS = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \int_{Sp.} \frac{a \cdot dy}{b-y}$ E $= \frac{\mu_0 I_2 a}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{b-(y_0-\frac{a}{2})}{b-(y_0+\frac{a}{2})}\right) > 0$ F

3. $\vec{F}_{CD} = \int_C^D i\, d\vec{\ell} \wedge \left(\vec{B}_1(y_0-\frac{a}{2}) + \vec{B}_2(y_0-\frac{a}{2})\right)$ G $= -\vec{e}_y \cdot i \cdot a \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1}{y_0-\frac{a}{2}} + \frac{I_2}{b-(y_0-\frac{a}{2})}\right)$ H

$\vec{F}_{EF} = \int_E^F i\, d\vec{\ell} \wedge \left(\vec{B}_1(y_0+\frac{a}{2}) + \vec{B}_2(y_0+\frac{a}{2})\right)$ I $= \vec{e}_y \cdot i \cdot a \cdot \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1}{y_0+\frac{a}{2}} + \frac{I_2}{b-(y_0+\frac{a}{2})}\right)$ J

$\vec{F}_{DE} = \int_D^E i\, \underbrace{d\vec{\ell}}_{\sim \vec{e}_y} \wedge \big(\underbrace{\vec{B}_1(y) + \vec{B}_2(y)}_{\sim -\vec{e}_x}\big)$ K $= \vec{e}_z \int_{y_0-\frac{a}{2}}^{y_0+\frac{a}{2}} dy\left(B_1(y)+B_2(y)\right) = \vec{e}_z \frac{\mu_0 i}{2\pi}\Big(I_1 \ln\frac{y_0+\frac{a}{2}}{y_0-\frac{a}{2}} + \dots$

$\dots I_2 \ln\frac{b-(y_0-\frac{a}{2})}{b-(y_0+\frac{a}{2})}\Big)$ L

$\vec{F}_{FC} = -\vec{e}_z \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(I_1 \ln\frac{(y_0+\frac{a}{2})}{(y_0-\frac{a}{2})} + I_2 \ln\frac{b-(y_0-\frac{a}{2})}{b-(y_0+\frac{a}{2})}\right)$ M $= -\vec{F}_{DE}$

$\underbrace{\vec{F}_{FC} + \vec{F}_{DE}}_{0} + \vec{F}_{CD} + \vec{F}_{EF} = \vec{F}$ N orientée selon $\vec{e}_y$.

Si $b = 2y_0$, on trouve $\vec{F} = \vec{0}$ O. Chaque fil exerce sur la spire une force $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ avec $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

4. Le calcul de $i \cdot d\phi = (\vec{F}_{CD} + \vec{F}_{EF}) \cdot dy_0$ (Th. de Maxwell) permet de retrouver $\vec{F}_{CD}$ et $\vec{F}_{EF}$. P

II.2.1. $\vec{F}_{CD} = \int_C^D i\, d\vec{\ell} \wedge \vec{B}_{CD}$ Q $= \frac{\mu_0}{2\pi} i I\left(-\frac{1}{2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y\right)$ R

$\vec{F}_{EF} = \int_E^F i\, d\vec{\ell} \wedge \vec{B}_{EF}$ S $= \frac{\mu_0}{2\pi} i I\left(-\frac{1}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y\right)$ T

2. $d\vec{F}_{DE} = i\, d\vec{\ell}_M \wedge \vec{B}(M)$ où $M(x, y_0, z_0+\frac{a}{2})$ est à la distance $\sqrt{x^2+y_0^2}$ du fil.
$d\vec{F}_{FC} = i\, d\vec{\ell}_N \wedge \vec{B}(N)$ où $N(x, y_0, z_0-\frac{a}{2})$ est à la distance $\sqrt{x^2+y_0^2}$ du fil. Comme $\vec{B}(N) = \vec{B}(M)$ et $d\vec{\ell}_N = -d\vec{\ell}_M$, on a :
$d\vec{F}_{DE} + d\vec{F}_{FC} = \vec{0}$. En sommant sur tous les $d\vec{\ell}_{M(x)}$ et $d\vec{\ell}_{N(x)}$ on obtient
$\vec{F}_{DE} + \vec{F}_{FC} = \vec{0}$. U

3. $\vec{F} = \vec{F}_{CD} + \vec{F}_{EF} = \underbrace{\frac{\mu_0}{2\pi} i I\, \vec{e}_x}_{V}$ et $\overbrace{\vec{\Gamma} = \vec{G'F'} \wedge \vec{F}_{EF} + \vec{G'C'} \wedge \vec{F}_{CD}}^{W} = 2 \cdot \left(\frac{a}{2}|\vec{F}_{CD}|\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\vec{e}_z)$

$\vec{\Gamma} = -\frac{a\sqrt{3}}{4\pi}\mu_0 i I \cdot \vec{e}_z$ X