UNIVERSITE PAUL SABATIER TOULOUSE III

année 2004/2005

Licence Physique Chimie et Applications
Mention physique
L2

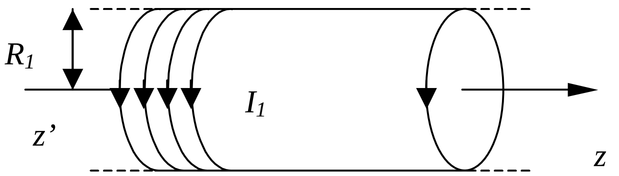
Contrôle Continu d'électromagnétisme

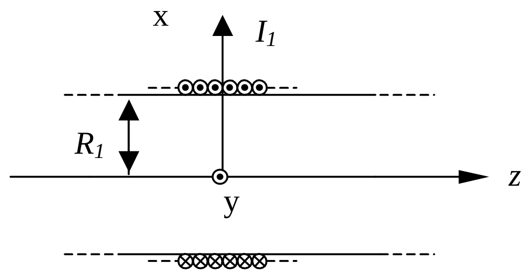
Durée : 1h30

Remarque : on peut traiter les parties II, III et IV indépendamment les unes des autres

I - Structure du champ magnétique créé par un solénoïde:

On considère un solénoïde cylindrique de rayon R_1, d'axe (Oz), constitué par l'enroulement de n spires circulaires par unité de longueur. Les spires sont jointives et sont toutes parcourues par un courant électrique d'intensité I_1, voir figures.





On souhaite calculer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en un point M *quelconque* de l'espace.

I-1- Quel système de coordonnées a-t-on intérêt à utiliser pour calculer le champ magnétique produit par le solénoïde ?

I-2- En vous appuyant sur les éléments de symétrie (plans de symétrie et d'antisymétrie) passant par le point M, ainsi que sur les invariances de la distribution de courant, déterminer les composantes non nulles de $\vec{B}(M)$ ainsi que les variables dont dépendent ces composantes dans les deux cas suivants :

I-2-a- Le solénoïde est infiniment long.

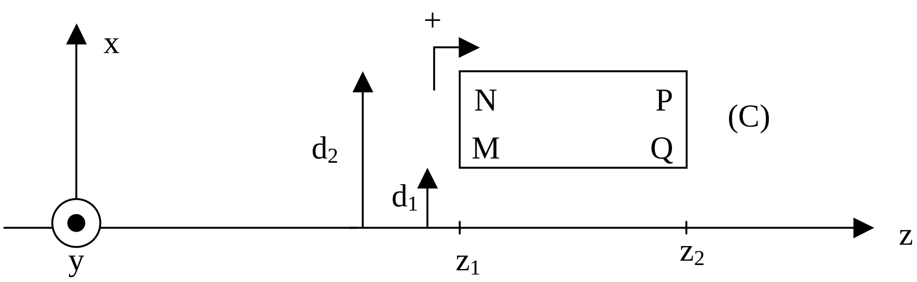
I-2-b- Le solénoïde est de longueur finie.

II - Solénoïde infini : calcul du champ magnétique

On cherche tout d'abord à calculer, à l'aide du théorème d'Ampère, le champ magnétique $\vec{B}(M)$ produit par le solénoïde loin de ses extrémités. La longueur du solénoïde étant grande devant son rayon R_1, on considèrera pour mener à bien ce calcul que le solénoïde est infiniment long et que la structure du champ magnétique est celle qui a été précisée à la question I-2-a.

II-1- Enoncez le théorème d'Ampère en précisant tous les termes.

II-2- On considère le contour d'Ampère plan rectangulaire (MNPQ) défini sur la figure suivante :



Calculez la circulation du champ magnétique sur le circuit fermé (MNPQ) dont l'orientation positive est indiquée sur la figure. Donnez le résultat en fonction de la (ou des) composante(s) non nulle(s) du champ magnétique, et (s'il y a lieu) des paramètres z_1, z_2, d_1 et d_2 qui définissent le contour.

II-3- Compte tenu du sens positif choisi pour orienter le contour, quelle est la direction du vecteur unitaire $\vec{n}$ de la normale à la surface plane rectangulaire définie par le contour ?

II-4- Le champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde est respectivement noté $\overrightarrow{B_{\text{int}}}=B_{\text{int}}\vec{e}_z$ et $\overrightarrow{B_{ext}}=B_{ext}\vec{e}_z$.

II-4-a- Appliquez le théorème d'Ampère dans le cas où $d_1<R_1$ et $d_2>R_1$. En déduire une relation entre les composantes B_{int} et B_{ext} .

II-4-b- Pourquoi cette relation nous permet-elle d'affirmer que le champ magnétique est uniforme, d'une part à l'intérieur du solénoïde et d'autre part à l'extérieur du solénoïde ?

II-4-c- Calculez B_{int} en fonction de I_1 , n et μ_0 , sachant qu'à l'extérieur du solénoïde, le champ magnétique est nul ($B_{ext}=0$).

<u>III - Solénoïde semi-infini : champ magnétique près d'une extrémité</u>

On cherche maintenant à évaluer le champ magnétique au voisinage d'une extrémité du solénoïde et à faible distance ρ de son axe (Oz). Le solénoïde semi-infini (caractérisé par R_1 , I_1 et n) occupe l'espace z<0, l'extrémité du solénoïde étant située à l'abscisse z=0.

On admettra que la composante B_z de $\vec{B}$ parallèle à l'axe du solénoïde est donnée, en un point M qui n'est pas trop éloigné de l'axe (Oz), par :

$$B_z=\frac{B_{\text{int}}}{2}\left\{1-\frac{z}{\left(R_1^2+z^2\right)^{1/2}}\right\},$$

où B_{int} , dont la valeur a été calculée à la question II-4-c, est la composante du champ magnétique loin de l'extrémité $(z<<0)$.

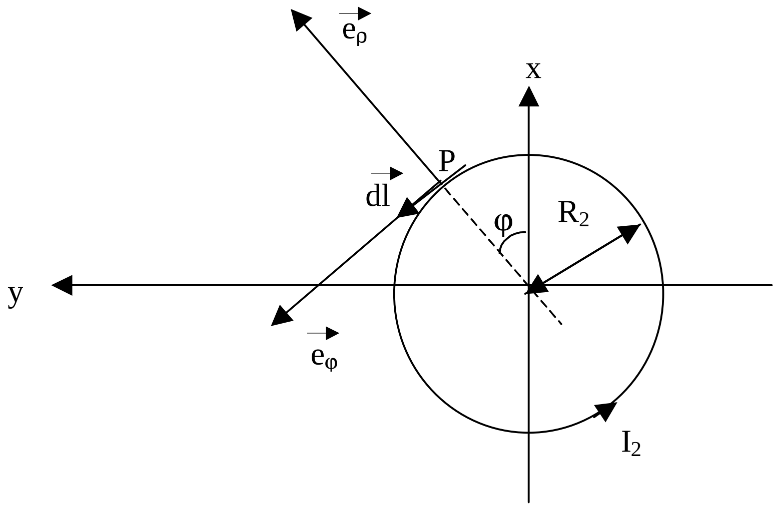
III-1- Utilisez l'équation $div\vec{B}=0$ pour obtenir une équation aux dérivées partielles liant les composantes de $\vec{B}$ parallèle et perpendiculaire à (Oz) (on utilisera une des expressions de l'opérateur divergence donnée dans le formulaire joint).

III-2- Calculez la dérivée $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ de la composante B_z .

III-3- Intégrez l'équation obtenue à la question III-1 et utilisez les résultats obtenus en III-2 pour calculer la composante du champ magnétique perpendiculaire à l'axe (Oz), en un point M non situé sur cet axe. On tiendra compte du fait que cette composante de $\vec{B}$ doit être nulle sur l'axe (Oz). On exprimera cette composante sous la forme $B_\rho=K\rho$ où K est une fonction de B_{int} , z et R_1 dont vous donnerez l'expression.

IV – Freinage électromagnétique :

On désire calculer la force de Laplace qui s'exerce sur une spire plate circulaire de rayon R_2 placée dans un solénoïde semi-infini de rayon $R_1 >> R_2$, et de même axe (Oz) que le solénoïde. La spire est parcourue par un courant constant d'intensité I_2, dont l'orientation est donnée dans la figure suivante :



IV-1- On cherche d'abord à calculer la force de Laplace exercée sur la spire dans le cas général où le champ magnétique est donné par $\vec{B} = B_\rho \vec{e}_\rho + B_z \vec{e}_z$, où chacune des composantes B_ρ et B_z prend la même valeur en tout point de la spire.

IV-1-a- Exprimez la force de Laplace $d\vec{F}$ exercée par le champ $\vec{B}$ sur l'élément $d\vec{l}$ de la spire centré sur un point P de la spire en fonction de I_2, $d\vec{l}$ et $\vec{B}$.

IV-1-b- Donnez l'expression du vecteur $d\vec{l}$ et déduisez en les composantes de la force $d\vec{F}$ dans la base locale $\left(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\right)$ liée au point P, en fonction de I_2, R_2, $d\varphi$, B_ρ et B_z.

IV-1-c- Déduisez-en l'expression de la force $d\vec{F}$ dans la base Cartésienne $\left(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$ et montrez que

$$d\vec{F} = I_2 R_2 B_z \cos(\varphi) d\varphi \cdot \vec{e}_x + I_2 R_2 B_z \sin(\varphi) d\varphi \cdot \vec{e}_y - I_2 R_2 B_\rho d\varphi \cdot \vec{e}_z \,.$$

IV-1-d- En déduire les composantes dans la base cartésienne de la force de Laplace totale $\vec{F}$ exercée sur la spire.

IV-2- On se place maintenant dans le cas particulier où la spire est située dans le solénoïde et loin de l'extrémité de celui-ci. Le champ magnétique étant alors donné par $B_z = B_{\text{int}}$ et $B_\rho = 0$, quelle est la force de Laplace totale $\vec{F}$ exercée sur la spire ?

IV-3- On se place maintenant dans le cas particulier où la spire est située près de l'extrémité du solénoïde. Le champ magnétique étant alors donné par $B_z \neq 0$ et $B_\rho = K\rho \neq 0$, quelle est la force de Laplace totale $\vec{F}$ exercée sur la spire en fonction de K, R_2 et I_2 ?

IV-4- Déduire des questions IV-2 et IV-3 qu'un mouvement de translation de la spire suivant (Oz) ne peut être freiné par la force de Laplace que lorsque la spire s'approche de l'extrémité du solénoïde.