

EXAMEN ELECTROMAGNETISME**2 heures.****Calculatrices et documents interdits.**

Vérifier qu'on vous a fourni une feuille résumant les systèmes de coordonnées et les opérateurs différentiels.

Question 1 (de cours) (Temps maximal conseillé 30 minutes).

1) Quelle différence fondamentale y a-t-il, entre d'une part le vecteur \mathbf{B} (champ magnétique) et d'autre part les vecteurs \mathbf{E} (champ électrique) et \mathbf{A} (potentiel vecteur) ? Expliquer la signification de cette différence quand on considère les symétries d'un problème.

2) Donner les quatre équations de Maxwell **en présence des sources et en régime lentement variable.**

- a) Donner également la forme intégrale de chacune des équations et spécifier **brièvement** sa signification physique.
- b) Quelle(s) équation(s) sont modifiée(s) en absence des sources ? Donner les équations modifiées
- c) Quelle(s) équation(s) sont modifiées pour des phénomènes variant rapidement dans le temps ? Donner les équations modifiées.

3) Citer et expliquer **brièvement** (quelques lignes maximum) deux applications pratiques du phénomène de l'induction électromagnétique.

Question 2 \square **Rotation uniforme d'un cylindre chargé en volume**

Soit C un cylindre de révolution d'axe Oz de rayon a et de longueur très grande devant a . C , chargé uniformément avec la densité volumique ρ , est mis en rotation autour de Oz avec une vitesse angulaire ω constante sans que cette rotation affecte la répartition des charges.

Remarque \square L'utilisation de ρ pour la densité volumique évite la confusion avec la coordonnée ρ

Nous utiliserons les équations correspondant à un régime qui ne varie pas dans le temps

- 1) Justifier l'utilisation des coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) (Une phrase suffit).
- 2) Faire un schéma du cylindre C, en représentant en un point M quelconque la base $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$
- 3) Nous admettons que le cylindre est infiniment long. Pourquoi? Que néglige t'on dans cette approximation ? (Quelques lignes suffisent).

I – Calcul du champ électrique.

- 4) Analyser les invariances afin de déterminer la ou les coordonnées dont dépend le champ **E**.
- 5) Par des discussions de symétrie de la distribution de charge déterminer la direction du champ **E** en un point M quelconque.
- 6) Déterminer le champ **E** à l'intérieur et à l'extérieur de C à l'aide du théorème de Gauss.

II – Calcul du champ magnétique

- 7) La rotation de C à vitesse angulaire constante implique une distribution de courants qu'on peut écrire sous la forme

$$\vec{j} = K \vec{e}_\phi$$

Justifier et obtenir une expression pour K

Justifier le choix de travailler avec les équations correspondant à un régime permanent.

- 8) Analyser les invariances afin de déterminer la ou les coordonnées dont dépendent les champs, **B** et **A**.
- 9) Le champ **B** est nul à l'extérieur du cylindre [La justification (**hors sujet**) est basée sur l'assimilation des couches de C entre les rayons ρ et $\rho+d\rho$ à des solénoïdes infiniment longs].

On veut calculer le champ **B** créé à l'intérieur de C. En considérant la symétrie de la distribution des courants prévoir la direction de ce champ (*justifier brièvement*) ainsi que celle du potentiel vecteur **A**.

A l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère et les conditions de continuité du champ **B**, montrer que le champ magnétique **B** en tout point M de C peut s'écrire

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 K \rho}{2} (a^2 - \rho^2) \vec{e}_z$$

Rappel on travaille en régime stationnaire.

III – Calcul du flux magnétique.

- 10) Rappeler l'expression du flux Φ d'un champ magnétique \mathbf{B} à travers une surface S . Déterminer le flux $d\Phi$ de \mathbf{B} à travers la surface élémentaire dS d'un anneau de rayon compris entre r et $r + dr$. (On distinguera deux cas $r < a$ et $r > a$.)
- 11) En déduire le flux Φ de \mathbf{B} à travers un disque circulaire de rayon r , perpendiculaire à l'axe z et centré sur cet axe. On le calculera d'abord pour $r < a$ puis pour $r = a$ et enfin pour $r > a$.

IV – Calcul du potentiel vecteur \mathbf{A} .

- 12) Donner la **forme intégrale** de la relation entre \mathbf{A} et \mathbf{B} . A l'aide des résultats du III en déduire le potentiel vecteur \mathbf{A} à l'intérieur et à l'extérieur de C .

V - Induction électromagnétique et régime variable

- 13) Le cylindre C est entouré d'une spire circulaire métallique. Cette spire de rayon $R > a$ est dans un plan perpendiculaire à l'axe z et centré sur cet axe. Calculer la f.é.m \mathcal{E} induite dans la spire si :
- a) Le cylindre tourne à une vitesse angulaire ω constante.
 - b) Le cylindre tourne à une vitesse angulaire $\omega(t) = \omega_0 t$. On considère que ω_0 est suffisamment faible pour pouvoir travailler *dans l'approximation des régimes **lentement** variables*.
Calculer le champ \mathbf{E}_I créé à l'intérieur et à l'extérieur de C par la variation temporelle du champ \mathbf{B} .