TD 5 - Propagation des ondes électromagnétiques

I. Structure d'une onde Plane

On considère une onde plane progressive sinusoïdale, de pulsation ω, se propageant dans le vide suivant la direction de cosinus directeurs α, β, γ.

1. Vérifier qu'en représentation complexe, le champ électromagnétique peut s'écrire sous la forme : $\mathbf{E}^*(M, t) = \mathbf{E_0} \exp [i(\mathbf{k}.\mathbf{r} - \omega t)]$ et $B(M, t) = \mathbf{B_0} \exp [i(\mathbf{k}.\mathbf{r} - \omega t)]$

2. En utilisant les équations de Maxwell écrites en notation complexe, déterminer la structure de cette onde plane: transversalité des champs, vecteur d'onde, rapport E/B.

II. Ondes stationnaires

On considère deux ondes planes de même fréquence ω, de même amplitude E_0 se propageant dans le vide selon la même direction Oz mais en sens inverse. Ces deux ondes sont polarisées rectilignement suivant la direction Ox

1. Exprimer les champs électriques $\mathbf{E_1}(t)$ et $\mathbf{E_2}(t)$ correspondants respectivement à l'onde se propageant suivant les z croissants et suivant les z décroissants.
2. Déterminer le champs électromagnétique $\mathbf{E}(M,t)$, $\mathbf{B}(M,t)$ au point M(x, y, z) de l'onde résultante.
3. Déterminer la position des plans d'onde où l'amplitude de **E** est maximale ou minimale.
4. Représenter sur un même graphe et à un instant t les deux champs **E** et **B**.

III. Réflexion normale sur un conducteur plan parfait

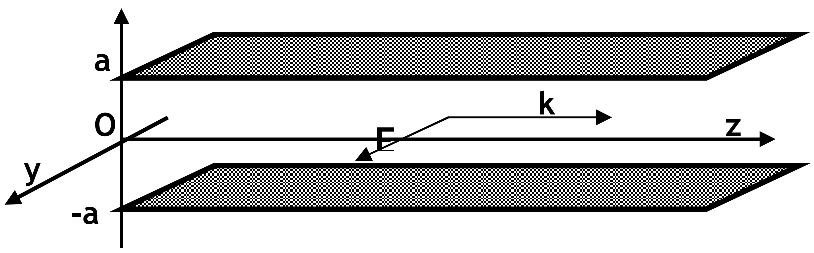
Dans un référentiel orthonormé Oxyz, l'espace correspondant à $z > 0$ est occupé par un conducteur parfait. Dans l'espace vide correspondant à $z < 0$, une onde incidente, plane, progressive, monochromatique de pulsation ω et de vecteur d'onde $\mathbf{k}_i = k\ \mathbf{e}_z$ $(k > 0)$ est caractérisée par son champ électrique complexe : $\mathbf{E}_i = E_0 \exp i(kz - \omega t)\ \mathbf{e}_x$ où E_0 est réel. On admet que l'onde réfléchie est plane, progressive et monochromatique de pulsation ω et que le champ électrique complexe associé est $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{r,0} \exp i(-kz - \omega t)$ où $\mathbf{E}_{r,0}$ est parallèle au plan $z = 0$.

1. Ecrire l'équation de continuité du champ électrique à la surface du conducteur. En déduire l'expression de $\mathbf{E}_{r,0}$ dans la base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$.
2. En déduire le champ électrique **E** en un point M(x, y, z), résultant de la superposition des ondes incidente et réfléchie. Donner les composantes de **E**.
3. Calculer **B** associé à **E** en un point M(x, y, z). Donner les composantes de **B**.
4. Calculer le vecteur de Poynting et sa valeur moyenne sur une période $< \mathbf{R} >_T$.

5. Représenter en z = 0 et à un instant donné les vecteurs $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{E}_r$, $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{B}_r$, et les vecteurs **k** des ondes incidente et réfléchie $\mathbf{k}_i$ et $\mathbf{k}_r$. Représenter à un instant donné les composantes de **E** et **B** en fonction de z dans l'intervalle [-λ, 0] où λ est la longueur d'onde. Préciser dans chaque cas la position des noeuds et des ventres.
6. Calculer le courant $\mathbf{J}_S$ à la surface du conducteur.

IV. Propagation guidée d'une onde électromagnétique

On considère deux plans de longueur L et de largeur b parfaitement conducteurs parallèles en x = +a et x = -a (avec a << L et a << b). Une onde électromagnétique de fréquence ω et de vecteur d'onde **k** se propage dans le vide dans la direction Oz parallèle à ces plans. Le champ électrique **E** associé à cette onde est transverse et a pour expression : $\mathbf{E} = E_0 \cos(\pi x/2a) \exp[i(kz-\omega t)]\ \mathbf{e_y}$,(E_x=E_z=0). (On rappelle qu'en régime variable, le champ électromagnétique est nul à l'intérieur de ces conducteurs, les charges et courants sont surfaciques).



1. Déterminer à l'aide de la relation de Maxwell-Faraday les composantes du champ magnétique **B** de l'onde électromagnétique. Peut-on dire ici que l'onde est transversale ? Vérifier que **B** est à flux conservatif.
2. Vérifier que **B** vérifie les relations de passage en x = a et x = -a.
3. Montrer à l'aide de la relation de Maxwell-Ampère que la relation de dispersion, liant k et ω, s'écrit : $k^2 = (\omega^2/c^2)-(\pi/2a)^2$. Définir la vitesse de groupe v_g et la vitesse de phase v_ϕ de l'onde électromagnétique.
4. Ecrire l'expression de **E** pour une fréquence ω inférieure à la fréquence de coupure $\omega_\chi = (\pi c/2a)$ (On considèrera alors que k est un nombre complexe imaginaire pur). Pourquoi l'onde électromagnétique ne peut pas se propager pour $\omega < \omega_c$? On se place dans les conditions où l'onde électromagnétique peut se propager entre les deux plans conducteurs ($\omega > \omega_c$ et k est réel).
5. Déterminer les composantes du vecteur de Poynting **R** associé à l'onde électromagnétique. Montrer que la valeur moyenne dans le temps $<\mathbf{P}>_t$ s'écrit : $<\mathbf{P}>_\tau = \dfrac{E_0^2}{2c\mu_0}\cos^2\left(\dfrac{\pi x}{2a}\right)\vec{e}_z$.
6. Calculer le flux $<P>_t$ de $<\mathbf{P}>_\tau$ à travers une section S du guide avec dS = dx b.
7. Calculer la valeur moyenne dans le temps de la densité volumique d'énergie électromagnétique $<e_m>_t$. Calculer la valeur moyenne $<<e_m>_t>_s$ de $<e_m>_t$ sur une section S du guide avec dS = dx b.
8. Calculer le rapport $<P>_t / <<e_m>_t>_s$. Commenter le résultat.