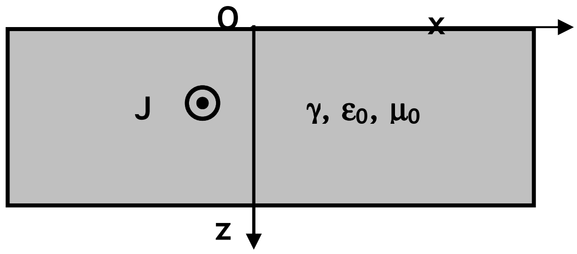
TD 4 - Equations de Maxwell (II)

I. Courant dans un conducteur en régime variable

Un conducteur métallique de conductivité γ, de permittivité ε_0=8.85 10^{-12} F.m^{-1} et de perméabilité $\mu_0=4\pi 10^{-7}$ H.m^{-1}, est le siège d'un courant volumique J sinusoïdal de pulsation élevée ω. On admet que la loi d'Ohm locale liant le courant volumique et le champ électrique est vérifiée dans le domaine de fréquences considérées.

1. Ecrire les équations de Maxwell pour ce milieu non chargé électriquement (ρ=0).
2. Définir le courant de déplacement J_D et montrer qu'à très haute fréquence son amplitude est négligeable devant celle du courant de conduction J_C (on prendra l'exemple du cuivre de conductivité γ = 5.7 10^7 S. m^{-1} à la fréquence ν=100 MHz. On négligera par la suite le courant de déplacement dans le conducteur.
3. En combinant les équations de Maxwell et la loi d'Ohm locale, montrer que J satisfait à une équation aux dérivées partielles de la forme : $\Delta J - \alpha \dfrac{\partial J}{\partial t} = 0$, où α est une constante à déterminer en fonction de μ_0 et γ. On rappelle que $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{F}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{F}) - \Delta\vec{F}$ où $\vec{F}$ est champ de vecteur.

Le conducteur occupe le demi-espace z >0 d'un repère orthonormé (Oxyz) et le courant volumique $\vec{J}$ est parallèle à l'axe Oy et ne dépend que du temps t et de z : $\vec{J} = J(z,t)\vec{e}_y$.



4. Ecrire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par J(z,t). Vérifier qu'en notation complexe l'expression $\underline{J}(z,t) = J_0\, exp[i(\dfrac{z}{\delta} - wt)$ est solution de cette équation. Expliciter δ en fonction de ω, μ_0 et γ. Calculer δ en précisant son unité et conclure sur la pénétration du courant dans un conducteur à très haute fréquence.
5. Donner l'expression réelle de J dans le conducteur et en déduire le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ en tout point M du conducteur. Calculer la puissance volumique moyenne $<P_J>_t$ dissipée par effet Joule dans le conducteur.

II. Effet de peau à la surface d'un bon conducteur

On considère un conducteur qui occupe l'espace z > 0 d'un référentiel Oxyz et qui est défini par ε_0, μ_0 et sa conductivité γ. On étudie les conditions d'existence d'un champ électromagnétique sinusoïdal de pulsation ω tel que : **E** = **E**(z) exp(iωt) et **B** = **B**(z) exp(iωt) où **E**(z) et **B**(z) ont des composantes complexes. On admet que $\gamma \gg \varepsilon_0\,\omega$.

1. Vérifier que les équations de Maxwell en représentation complexe peuvent s'écrire

(1) **rot** **E**(z) = $-i\,\omega$ **B**(z); (2) div **E**(z) = 0; (3) div **B**(z) = 0; (4) **rot** **B**(z) = $\mu_0\,(\gamma + i\,\varepsilon_0\,\omega)$ **E**(z).

Etablir les équations différentielles vérifiées par **E**(z) et **B**(z). On posera $\delta = (2/\,\mu_0\,\omega\,\gamma)^{1/2}$. On remarquera que **B**(z) s'élimine entre (1) et (4) en utilisant l'identité : **rot** (**rot** (**E**(z)) = **grad** (div **E**(z)) – Δ(**E**(z)).

2. Quelle est la solution pour **B**(z) en admettant que le champ magnétique doit rester fini dans tout l'espace.

3. On admet maintenant que **B** est porté par Oy : **B** = B(z) exp($i\omega t$)$\mathbf{e}_y$. Donner l'expression de **B** en fonction de ω, t, z, d, $\mathbf{e}_y$ et B(0), puis l'expression de **B** en notation réelle.

4. Exprimer le champ électrique **E** en fonction de B(0), z, γ, et δ. Donner l'expression de **E** en notation réelle.

5. On considère un cylindre d'axe Oz. On appelle S la section du cylindre appartenant au plan xOy. Calculer la valeur moyenne du flux du vecteur de Poynting **R** à travers S en fonction de δ, γ, S, μ_0 et $B(0)^2$. Que représente cette quantité ?