TD 3 - Equations de Maxwell (I)

I. Solénoïde en régime variable

Sur une surface cylindrique d'axe (Oz), de centre O, de rayon R et de longueur $2l$ ($l >> R$) on réalise un enroulement serré de n fils fins par unité de longueur, parcourus par un courant d'intensité $i(t)$. Un point M dans le solénoïde est défini dans la base cylindrique $\left(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}\right)$ par le vecteur position $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z}$.

A. Régime lentement variable : On admet que le champ $\overrightarrow{B_0}(t)$ dans le solénoïde est uniforme. Il est accompagné par le champ électrique $\overrightarrow{E_1}(M,t)$.

1. Précisez les orientations de $\overrightarrow{B_0}$ et $\overrightarrow{E_1}$.

2. Donner l'expression de $\overrightarrow{B_0}(t)$ en fonction de n et $i(t)$.

3. Calculer $\overrightarrow{E_1}(M,t)$ en utilisant la forme intégrale de la loi de Maxwell-Faraday.

B. Régime fortement variable : $\overrightarrow{E_1}(M,t)$ crée un champ $\overrightarrow{B_2}(M,t)$ qui se superpose à $\overrightarrow{B_0}(t)$.

4. Calculer $\overrightarrow{B_2}(M,t)$ en utilisant la forme locale de la loi de Maxwell-Faraday et sans introduire de constante d'intégration.
5. Que peut-on dire du champ magnétique total en M ? Peut-on définir l'inductance propre de ce solénoïde ?

6. A son tour, $\overrightarrow{B_2}(M,t)$ va induire un champ électrique $\overrightarrow{E_3}(M,t)$ qui se superpose à $\overrightarrow{E_1}(M,t)$. Donner la méthode de calcul de $\overrightarrow{E_3}$.

C. Application au régime sinusoïdal :

Sachant que R=2cm, $(\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2} = 3 \cdot 10^8\, ms^{-1}$ et $i(t) = I_m \cos(\omega t)$, évaluer le domaine de fréquences permettant de considérer le champ magnétique comme uniforme dans le solénoïde et tel que $\vec{B}(M,t) = \overrightarrow{B_0}(t) = B_m\, cos(\omega t)\overrightarrow{e_z}$.

II. Condensateur en régime variable

On considère un condensateur plan à armatures circulaires, de rayon a, distantes de d, alimenté par une tension sinusoïdale $u(t) = u_m \cos(\omega t)$, de fréquence 50 Hz. Le champ électrique **E** créé par cette tension entre les armatures est uniforme et dirigé suivant Oz a pour expression: $\mathbf{E} = E_m \cos(\omega t)\mathbf{e_z}$. Dans ce problème, on néglige les effets de bord.

1. Exprimer la relation entre u_m et E_m donnée par l'électrostatique.
2. Exprimer l'énergie électrique ζ_e emmagasinée par le condensateur, sachant que la densité d'énergie électrique est égale a $e_e = (\varepsilon_0 E^2)/2$. Donner sa valeur moyenne $\langle e_e \rangle_T$ dans le temps.

3. Le caractère sinusoïdal de la tension d'alimentation conduit à l'existence d'un champ magnétique **B** entre les armatures. Montrer par des arguments de symétrie que ce champ **E** est dirigé suivant le vecteur unitaire $\mathbf{e}_\phi$ (on utilisera les coordonnées cylindriques ρ, ϕ et z. De quelle(s) variable(s) ρ, ϕ, z) dépend-il à priori ?
4. En utilisant l'équation de l'équation de Maxwell-Ampère, montrer que le champ magnétique **B** a pour expression : $\mathbf{B} = -(\rho\varepsilon_0\mu_o\omega)\ (E_0/2)\ \sin(\omega t)\ \mathbf{e}_\phi$.
5. Exprimer l'énergie magnétique ζ_m emmagasinée dans le condensateur sachant que la densité d'énergie magnétique est $e_m = (B^2/2\mu_0)$. Montrer que $<\zeta_m> = (1/8)(a\omega/c)^2 <\zeta_e>$. Montrer qu'à la fréquence de 50 Hz l'énergie électromagnétique totale ζ_{em} se réduit à l'énergie électrique. On prendra a=1O cm.
6. Rappeler la définition du vecteur de Poynting **R** et donner son expression.
7. Exprimer son flux Φ à travers la surface latérale S_L du condensateur (bande cylindrique de hauteur d.
8. Montrer que ce flux est égal à $-d\zeta_e/dt$.
9. Ce champ magnétique variable peut lui aussi induire un champ électrique induit **E'** dirigé suivant z dont il n'a pas été tenu compte dans ce qui précède. En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, montrer que le champ induit **E'** est tel que : $E' = (\rho\omega/2c)^2\ E$ et qu'il est bien négligeable dans un condensateur à la fréquence de 50 Hz. A quelles fréquences n'est-il plus négligeable ? (On prendra a= 10 cm).

Travail personnel : Courants de Foucault dans un conducteur cylindrique

On considère un cylindre conducteur massif d'axe Oz, de rayon R et de conductivité γ, situé dans un champ magnétique appliqué uniforme $\mathbf{B}_a = B_0 \cos(\omega t)\ \mathbf{e}_z$ créé par des sources extérieures.

1. La relation de Maxwell-Faraday relie $\mathbf{B}_a$ à un champ électrique $\mathbf{E}_1$. En utilisant des considérations de symétrie, expliquer pourquoi $\mathbf{E}_1$ est dirigé selon $\mathbf{e}_\phi$.

2. En utilisant un contour (C) de rayon r et d'axe Oz, orienté selon $\mathbf{e}_{□}$, écrire la relation de Maxwell-Faraday sous forme intégrale et en déduire l'expression de $\mathbf{E}_1$ en fonction de r, B_0, ω et t.

3. En déduire l'expression du courant volumique $\mathbf{J}_1$ en fonction de ρ, B_0, ω, t, et de la conductivité γ.

4. Calculer la puissance volumique P(t) dissipée par effet Joule dans le conducteur en fonction de ρ, B_0, ω et γ. En déduire sa valeur moyenne dans le temps $<P(t)>_t$.

5. On s'intéresse maintenant à la correction $\mathbf{B}_1$ apportée au champ magnétique $\mathbf{B}_a$ par la présence de $\mathbf{E}_1$. Calculer $\mathbf{B}_1(\rho)$ en intégrant le théorème d'Ampère sur un contour rectangulaire de côtés Δz pour l'un et $\rho < R$ pour l'autre. On prendra $\mathbf{B}_{□}$ (ρ=0) = 0. Donner l'expression de $\mathbf{B}_1$ en fonction de ρ, ω, μ_0, γ et t.