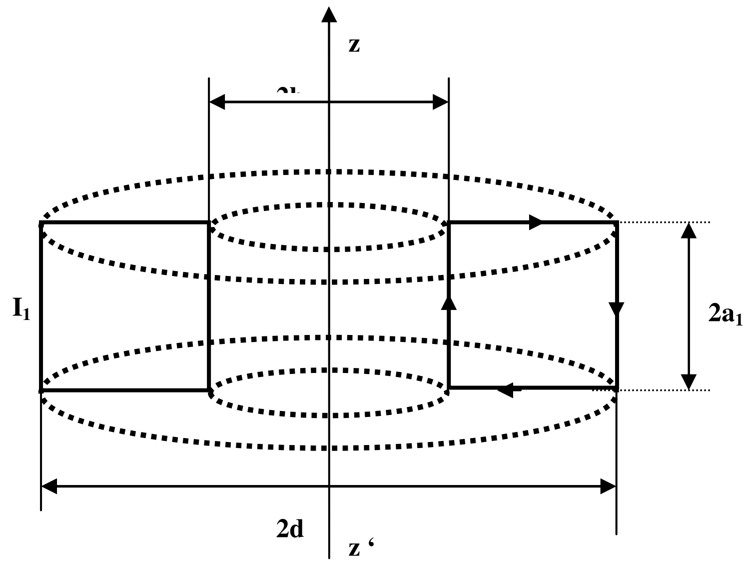
TD2 - INDUCTANCE PROPRE, ENERGIE MAGNETIQUE

I.- Inductance propre d'un solénoïde

Une bobine S d'axe z'z, de longueur l et de rayon a, comporte n spires par unité de longueur, d'épaisseur négligeable. Ses dimensions (l >> a) sont telles que l'on pourra utiliser l'approximation du solénoïde infini. La bobine est parcourue par un courant stationnaire d'intensité I>0, comptée le long du bobinage orienté dans le sens direct autour de Oz. On admettra que le champ magnétique est nul en tout point extérieur au solénoïde.

1. En appliquant le théorème d'Ampère au contour orienté (figure ci-dessous), démontrer que le champ magnétique $\vec{B} = B_Z(\rho)\vec{e}_Z$ créé par le solénoïde en un point M(ρ, φ, z) a pour valeurs : $\mu_0 nI\,\vec{e}_Z$ pour $\rho \le a$; $\vec{0}$ pour $\rho > a$.
2. En déduire les valeurs du potentiel vecteur $\vec{A} = A_\varphi(\rho)\vec{e}_\varphi$ pour ρ > a et ρ < a, sachant que le potentiel-vecteur est nul sur l'axe de la bobine et qu'il est continu à la surface du solénoïde.
3. Calculer le flux propre Φ de la bobine S à partir du potentiel vecteur $\vec{A}$.
4. Vérifier que ce flux s'exprime en fonction du nombre total N de spires de la bobine et du flux ϕ à travers l'une quelconque d'entre elles.
5. Déduire de Φ l'expression du coefficient d'inductance propre L de la bobine S en fonction de n, l a et de μ_0, permittivité magnétique du vide.
6. Calculer, en utilisant l'expression de $\vec{A}$, l'énergie magnétique du solénoïde.

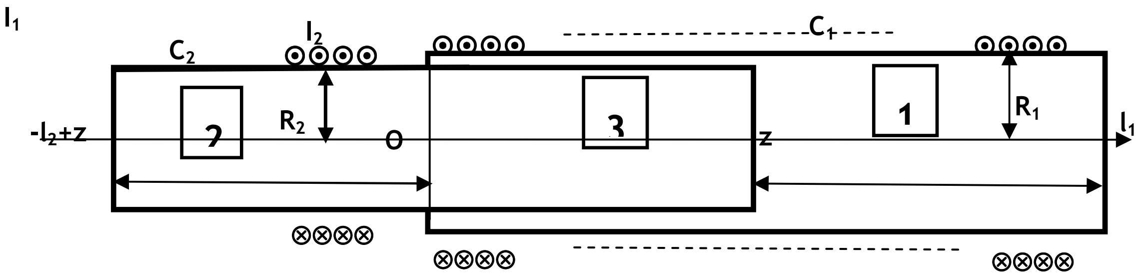


II.- Inductance mutuelle de deux solénoïdes couplés. Solénoïde plongeur

On considère un solénoïde C_1 d'axe z'z de longueur l_1 et de rayon R_1, comportant n_1 spires par unité de longueur. Ses dimensions ($l_1 >> R_1$) sont telles que l'on peut utiliser l'approximation du solénoïde infini. Le solénoïde est parcouru par un courant stationnaire d'intensité $I_1 > 0$. Le champ magnétique B_1, à l'intérieur du solénoïde C_1 est uniforme et a pour expression : $\mathbf{B_1} = \mu_0 n_1 I_1\,\mathbf{e_z}$. On admettra que $\mathbf{B_1}$ est nul en tout point extérieur à C_1.

1. Calculer le flux propre Φ_1 du solénoïde C_1 et en déduire le coefficient d'inductance propre L_1 de C_1.

Un second solénoïde C_2, de même axe z'z et de longueur l_2 ($l_2 >> R_2$) et de rayon R_2 légèrement inférieur à R_1 (on admettra que $R_1 \approx R_1 \approx R$), est emboité et peut coulisser sans frottement à l'intérieur du solénoïde C_1. C_2 comporte n_2 spires par unité de longueur parcourues courant stationnaire d'intensité I_2 de même sens que I_1. L'origine O de l'axe z'z est choisie sur la face gauche de C_1 ; la face droite de C_2 est repérée par son abscisse z (z > 0). Les longueurs l_1 et l_2 sont suffisamment grandes pour pouvoir négliger les effets d'extrémités. On appellera L_2 le coefficient d'inductance propre de C_2.



2. Etablir l'expression du coefficient d'inductance mutuelle M des deux solénoïdes coaxiaux en fonction de n_1, n_2, R, μ_0 et de la longueur de pénétration z de C_2 dans C_1.

3. Calculer le coefficient de couplage des deux circuits $K = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$. Dans quel intervalle ce coefficient peut-il varier ? Celui-ci dépend-il des valeurs respectives de l_1 et l_2 ?

4. Donner les expressions du champ magnétique **B** dans les régions $[z, l_1] \equiv [1]$, $[-l_2 + z, 0] \equiv [2]$ et $[0, z] \equiv [3]$ lorsque les deux solénoïdes coaxiaux ont en commun une longueur z. Calculer alors l'énergie magnétique ξ_m du système $\{C_1, C_2\}$ à partir de la densité volumique d'énergie magnétique e_m. En déduire l'expression de l'énergie d'interaction magnétique mutuelle ξ_{mM} entre C_1 et C_2. Vérifier alors l'expression de M établie à la question 2.