

EXAMEN
DE MECANIQUE
(SECONDE SESSION)
(Durée : 1h30)

Exercice 1 : Manège du "service à thé"

Sur le plateau (\mathcal{P}) d'un manège (plateforme circulaire de centre O et de rayon R), on a installé un disque (\mathcal{D}), de centre C et de rayon $r < R$, sur la circonférence duquel est fixé un siège, repéré par le point M .

Le plateau (\mathcal{P}) du manège tourne avec une vitesse angulaire constante Ω autour de son axe vertical ascendant Oz , par rapport à son bâti, auquel est associé le référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Le disque (\mathcal{D}) a, par rapport au plateau (\mathcal{P}), un mouvement de rotation uniforme, de vitesse ω autour de l'axe de révolution Cz .

On définit les référentiels $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié à (\mathcal{P}), et $\mathcal{R}_{\mathcal{D}}(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_z)$ lié au siège M de (\mathcal{D}), avec $\widehat{(\vec{e}_x, \vec{e}_x)} = \Omega t$ et $\widehat{(\vec{e}_x, \vec{e}_1)} = \omega t$.

On pose $\overline{OC} = L\vec{e}_x$ ($L < R$ constant) et $\overline{CM} = r\vec{e}_1$.

a) **Définir** les vecteurs rotation $\overline{\Omega}(\mathcal{R}_{\mathcal{P}}/\mathcal{R})$, $\overline{\Omega}(\mathcal{R}_{\mathcal{D}}/\mathcal{R}_{\mathcal{P}})$ et $\overline{\Omega}(\mathcal{R}_{\mathcal{D}}/\mathcal{R})$.

b) **Calculer** indépendamment les unes des autres, les vitesses $\vec{V}(M/\mathcal{R}_{\mathcal{P}})$, $\vec{V}_e(M, \mathcal{R}_{\mathcal{P}}/\mathcal{R})$ et $\vec{V}(M/\mathcal{R})$. **Vérifier** la loi de composition des vitesses.

c) **Calculer** indépendamment les unes des autres, les accélérations $\vec{a}(M/\mathcal{R}_{\mathcal{P}})$, $\vec{a}_e(M, \mathcal{R}_{\mathcal{P}}/\mathcal{R})$, $\vec{a}_c(M, \mathcal{R}_{\mathcal{P}}/\mathcal{R})$ et $\vec{a}(M/\mathcal{R})$. **Vérifier** la loi de composition des accélérations.

d) **Déterminer** les forces d'inertie de Coriolis et d'entraînement subies par le point M .

Exercice 2 : Satellites artificiels

Soit $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ la constante de gravitation universelle, $R = 6378 \text{ km}$ le rayon moyen de la Terre, $M = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ la masse de la Terre et T son centre.

- 1) Définir le référentiel géocentrique \mathcal{R}_o .
- 2) Dans l'approximation d'une répartition des masses à symétrie sphérique, déterminer l'expression du module $g(r)$ du champ gravitationnel terrestre à une distance $r > R$ de T . On le donnera ensuite en fonction de r , R , et $g_o = g(R)$.
- 3) Déterminer, en fonction de r , R , et g_o , la norme $V(r)$ de la vitesse, dans le référentiel géocentrique, d'un satellite terrestre de masse m en orbite circulaire de rayon r autour de la Terre.
- 4) En déduire la période $T(r)$ du mouvement du satellite en fonction de r , R , et g_o .
- 5) Comparer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de gravitation d'un satellite en orbite circulaire.
- 6) Donner l'énergie mécanique du satellite.
- 7) Qu'appelle-t-on satellite géostationnaire ?
- 8) Déterminer le plan de l'orbite d'un satellite géostationnaire.
- 9) Peut-on lancer un satellite de telle sorte qu'il reste à la verticale de Paris ?

Questions de cours

Enoncer la relation fondamentale de la dynamique et le théorème du moment cinétique en un point fixe O de manière littérale et mathématique.