Licence 1 – semestre 2
Sciences de l'Ingénieur et Préparation aux Concours

Année 2006-2007
2ème session

EXAMEN DE MECANIQUE - 2H

Mécanique du point

Questions de cours

1- Qu'est-ce qu'une force conservative ? Donner un exemple d'une force conservative et un autre d'une qui ne l'est pas.

2- Par le calcul, établir l'expression de l'énergie potentielle associée à la force de rappel d'un ressort, $\vec{F} = -k(x-x_o)\,\vec{e}_x$ où $\vec{e}_x$ est l'axe du ressort, k sa raideur, x_o sa longueur à l'équilibre et x sa longueur à chaque instant.

3- Enoncer le théorème de l'énergie mécanique

Mouvement en spirale

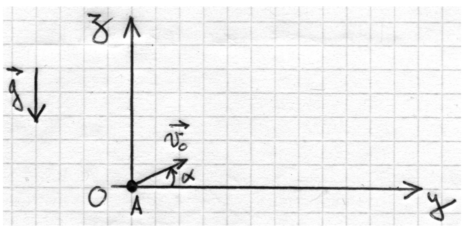
Dans le plan (xOy) du référentiel $R(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$, le mouvement d'un point P est décrit par la variation de ses coordonnées cartésiennes en fonction du temps t :

$x = be^{-kt}\cos kt$; $y = be^{-kt}\sin kt$ (b et k sont deux constantes positives)

1.a- Déterminer en fonction de t les coordonnées polaires ρ et φ de P.
1.b- En déduire l'équation polaire de la trajectoire de P.
1.c- Représenter la trajectoire.
2.a- Calculer en fonction de t les composantes polaires du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{P/R}}$.
2.b- En déduire l'angle $\alpha = (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{v_{P/R}})$.
2.c- Indiquer la nature du mouvement (uniforme, accéléré ou retardé).
3.a- Calculer en fonction de t les composantes polaires du vecteur accélération $\overrightarrow{a_{P/R}}$.
3.b- Préciser la direction de $\overrightarrow{a_{P/R}}$ et représenter ce vecteur sur la figure.
4.a- Calculer en fonction de t les composantes tangentielle et normale de $\overrightarrow{a_{P/R}}$.
4.b- En déduire la valeur du rayon de courbure de la trajectoire.

Mouvement sous l'action de la pesanteur

Dans un référentiel terrestre R supposé galiléen $R\ (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ (où Oz est la verticale ascendante et le sol correspond au plan (Oxy)), on étudie le mouvement du point A, de masse *m* et de coordonnées (x, y, z) sous la seule action de son poids. A l'instant t = 0, A se trouve en O et possède le vecteur vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \cos(\alpha)\vec{e}_y + v_0 \sin(\alpha)\vec{e}_z$ avec $\alpha \in [0, \pi/2]$. (cf. Figure ci-dessous).



1. Déterminer les expressions de x(t), y(t) et z(t). Montrer que la trajectoire est plane.

2. On se place dans le cas général où $\alpha \neq \pi/2$.
   2.a Former l'équations cartésienne de la trajectoire et identifier celle-ci.
   2.b Représenter le graphe de la trajectoire. Indiquer l'altitude maximale.
   2.c Déterminer la distance y_C qui sépare O du point d'impact C de A sur le sol (y_C est la portée). Indiquer pour quelle valeur de α la portée est maximale.

3. Toujours avec α quelconque, le point A est soumis à une force supplémentaire de frottement $\vec{f} = -k\vec{v}_{A/R}$, où k est une constante et $\vec{v}_{A/R}$ son vecteur vitesse.
   3.a Etablir les équations différentielles auxquelles obéissent les composantes du vecteur vitesse. Calculer ces composantes et montrer qu'il existe une vitesse limite dont on déterminera les caractéristiques.
   3.b Déterminer les expressions de y(t) et de z(t). En admettant que z(t) peut prendre des valeurs < 0, montrer que la trajectoire admet une asymptote que l'on déterminera. A quel instant l'altitude est-elle maximale? Quelle est alors l'abscisse du sommet de la trajectoire. Comparer ce résultat avec la valeur obtenue en 2b en faisant tendre k vers 0.

Mécanique du solide

Questions de cours

1- Soit un référentiel galiléen $\Re = (O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$. Comment est défini alors le référentiel R* ?
2- A l'aide d'une formule et d'un schéma, définir le plus clairement possible la grandeur 'moment d'une force'.
3- Quelles sont les deux relations fondamentales de la dynamique qui interviennent en mécanique du solide ?

Eléments cinétiques d'une boule de billard

Dans un référentiel galiléen $\Re = (O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$, où (Oz) est la verticale ascendante, on considère une boule de billard (sphère pleine homogène) de centre C, de masse M et de rayon a.

1- a) Quels sont les axes principaux d'inertie ?
   b) Déterminer le moment d'inertie I_C de la boule par rapport à C.
   c) Montrer que les moments d'inertie par rapport à (Cx), (Cy) et (Cz), notés respectivement I_{Cx}, I_{Cy} et I_{Cz} vérifient : $I_{Cx} = I_{Cy} = I_{Cz} = 2/3\ I_C$.
   d) En déduire l'expression du moment d'inertie I_{Cx} de la boule en fonction de M et de a.

2- Un joueur lui communique une vitesse $\vec{v}_C = v_o\ \mathbf{e_y}$, ainsi qu'une rotation angulaire $\vec{\omega}$ dirigée suivant $\vec{e}_x$.
   a) Quelle est l'expression du moment cinétique en C par rapport à R noté $\vec{L}_{C/R}$?
   En déduire l'énergie cinétique E_{k/R^*} de rotation du ballon.
   b) Quelle doit être la relation entre v_o et ω pour qu'il y ait roulement sans glissement ?