Mécanique - Septembre 2007

Mécanique du point

Questions de cours : 3

1 - Force conservative : force dont W ne dépend pas du chemin suivi 0,5
ex de force conservative : le poids, ...
ex de force non conservative : une force de frottement } 0,5

2 - $dE_p = -dW = -\vec{F}\cdot\vec{dl}$ 0,5
$= k(x-x_0)\,dx$ 0,5
↳ $E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2 + C^{te}$ 0,5

3 - $dE_m = dW_{nc}$ 0,5

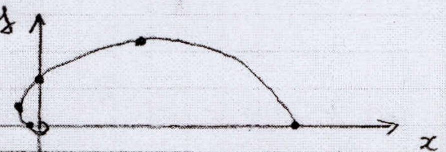
Mouvement en spirale : 6

1a - $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = b e^{-kt}$; $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = kt$ 0,5

1b - éq. polaire : $\rho(\varphi) \Rightarrow \rho = b e^{-\varphi}$ 0,5

1c - $\begin{cases} \varphi = 0 \to \rho = b \; ; \; \varphi = \frac{\pi}{4} \to \rho = 0{,}46\,b \; ; \; \varphi = \frac{\pi}{2} \to \rho = 0{,}216\,b \\ \varphi = \frac{3\pi}{4} \to \rho = 0{,}09\,b \; ; \; \varphi = \pi \to \rho = 0{,}04\,b \; ; \; \varphi \to +\infty \to \rho = 0 \end{cases}$ 0,5

↳



0,5

2a - $\vec{v}_{P/R} = \begin{vmatrix} \dot\rho \\ \rho\dot\varphi \end{vmatrix}_{R_c} = \begin{vmatrix} -kb e^{-kt} \\ kb\, e^{-kt} \end{vmatrix}_{R_c}$ 0,5

2b - $\vec{v}_{P/R}\cdot\vec{OP} = \dot\rho\rho = -kb^2 e^{-2kt}$ 0,5
↳ $\cos\varphi = \frac{\vec{v}_{P/R}\cdot\vec{OP}}{\|\vec{v}_{P/R}\|\cdot\|\vec{OP}\|} = \frac{-kb^2 \cancel{e^{-2kt}}}{\sqrt{2}\,kb\,\cancel{e^{-kt}}\cdot b\cancel{e^{-kt}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}$ 0,5

2c - $\|\vec{v}_{P/R}\| = \sqrt{2}\,kb e^{-kt} \Rightarrow \|\vec{v}_{P/R}\| \searrow$ qd $t \nearrow$ ⇒ mouvement retardé 0,5

3a - $\vec{a}_{P/R} = \begin{vmatrix} \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2 \\ \rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi \end{vmatrix}_{R_c} = \begin{vmatrix} (k^2 b - bk^2)e^{-kt} = 0 \\ -2k^2 b e^{-kt} \end{vmatrix}_{R_c}$ 0,5

3b - $\vec{a}_{P/R} = a_t\,\vec{e}_t + a_n\,\vec{e}_n$ avec $a_t = \dot v = -\sqrt{2}\,k^2 b e^{-kt}$ 0,5
$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{2}\,k^2\,b\,e^{-kt}$ 0,5

3c - $a_n = \frac{v^2}{R_c} \Rightarrow R_c = \sqrt{2}\,b\,e^{-kt}$ 0,5

6

Mouvement sous l'action de la pesanteur :

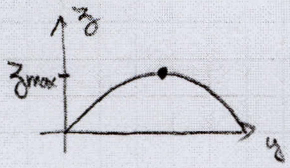
1- $\Sigma \vec{F} = m \vec{a}_{A/R} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = C^{te} = 0 \\ \dot{y} = C^{te} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{z} = -gt + C^{te} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$

$\hookrightarrow \begin{cases} x = C^{te} = 0 \\ y = v_0 \cos\alpha . t + C^{te} = v_0 \cos\alpha\, t \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + \underset{0}{C^{te}} \end{cases}$ 0,5 0,5

$x = C^{te} \Rightarrow$ mvt plan 0,5

2 a. éq. cartésienne : $z(y) \Rightarrow z = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} y^2 + \tan\alpha . y \rightarrow$ parabole 0,5

2 b -



z_{max} tel que $\left.\frac{dz}{dy}\right|_{z\,max} = 0$ 0,5

. ou + simple tel que $\dot{z}$ en $z_{max} = 0$

Après calcul : $z_M = \frac{1}{2g} . \sin^2\alpha . v_0^2$ 0,5

2 c - $y = y_c$ pour $z = 0 \Rightarrow y\left(-\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} y + \tan\alpha\right) = 0$

$\hookrightarrow y_c = -\tan\alpha \times -\frac{2 v_0^2 \cos^2\alpha}{g} = 2\frac{v_0^2}{g} . \sin\alpha \cos\alpha$ 0,5

α_{max} telle que $\left.\frac{d y_c}{d\alpha}\right|_{\alpha\, max} = 0$ 0,5

$\hookrightarrow \frac{d y_c}{d\alpha} = 2\frac{v_0^2}{g}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = 0$ pour $\cos\alpha = \sin\alpha$
$\Downarrow$
$\alpha = \frac{\pi}{4}$

3. $\Sigma \vec{F} = m \vec{a}_{A/R} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -k\dot{x} & (a) \\ m\ddot{y} = -k\dot{y} & (b) \\ m\ddot{z} = -mg - k\dot{z} & (c) \end{cases}$

$\hookrightarrow$ (a) $\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} = 0 \rightarrow \dot{X} + \frac{k}{m} X = 0 \rightarrow X = A e^{-\frac{k}{m}t}$
C.I. $\Rightarrow A = 0$

(b) $\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} = 0 \rightarrow \dot{Y} + \frac{k}{m} Y = 0 \Rightarrow Y = B e^{-k/m\, t}$
C.I. $\Rightarrow B = v_0 \cos\alpha$

(c) $\ddot{z} + \frac{k}{m}\dot{z} = -g \rightarrow Z = C e^{-k/m\, t} - \frac{gm}{k}$

C.I. $\Rightarrow C = v_0 \sin\alpha + \frac{gm}{k}$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = 0$ 0,5
$\dot{y}(t) = v_0 \cos\alpha\, e^{-k/m\, t}$ 0,5
$\dot{z}(t) = \left(v_0 \sin\alpha + \frac{gm}{k}\right) e^{-k/m\, t} - \frac{gm}{k}$ 0,5

$\hookrightarrow$ qd $t \rightarrow +\infty$, $\vec{v}_{A/R} \rightarrow \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -\frac{gm}{k} \end{array}\right._R$ 0,5

Mécanique du solide

Questions de cours: — 2

1. $R^* = (C, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ où C est le centre de masse du solide considéré — 0,5

2. $\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{OA} \wedge \vec{F}$ — 0,25 / 0,25

3. . $\sum \vec{F}_{ext} = m\, \vec{a}_{C/R}$ — 0,5

   . $\sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext}) = \left.\dfrac{d\vec{L}_O}{dt}\right|_R$ — 0,5

Eléments cinétique d'une boule de billard: — 4

1a. $Cx, Cy, Cz \rightarrow [I]_C = \begin{pmatrix} I_{Cx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Cy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Cz} \end{pmatrix}_R$ — 0,5

b. $I_C = \int_{Vol} (x^{*2} + y^{*2} + z^{*2}) \rho\, dV = \int_{Vol} r^2 \rho\, dV = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3} \iiint r^4 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$ — 0,5

$$\vdots$$

$$= \frac{3}{5} M a^2$$

c. $I_{Cx} = \int_V (y^{*2} + z^{*2}) \rho\, dV$; $I_{Cy} = -$; $I_{Cz} = -$ — 0,5

$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_{Cx} + I_{Cy} + I_{Cz} = 2 I_C \\ I_{Cx} = I_{Cy} = I_{Cz} \end{array} \right.$

$\rightarrow I_{Cx} = I_{Cy} = I_{Cz} = \dfrac{2}{3} I_C$ — 0,5

2a. $\vec{L}_{C/R} = [I]_C \cdot \vec{\omega} = \omega I_{Cx}\, \vec{e}_x$ — 0,5

$\underbrace{E_{k/R^*} = \frac{1}{2} \vec{L}^* \vec{\omega}} = \underbrace{\frac{1}{2} \vec{L}_{C/R} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \omega^2 I_{Cx}}$ — 0,5

$= \omega^2 \frac{2}{2} \frac{3}{3} \frac{\pi a^2}{5}$

b. $\underbrace{CRSG \Rightarrow \vec{v}_g = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_{I_1/R} = \vec{v}_{I_2/R}} \Rightarrow \underbrace{\vec{v}_{C/R} + (\vec{\omega} \wedge \vec{CI}) = \vec{0}}$ — 0,5

$\rightarrow v_0 + \omega a = 0$ — 0,5

21