Université Paul Sabatier
L1 STS PCP

Toulouse, le 20 Mai 2008

EXAMEN
DE MECANIQUE DU POINT
(Durée : 1h30)

Aucun document personnel, ni calculatrice ne sont autorisés.
Les deux exercices sont indépendants.

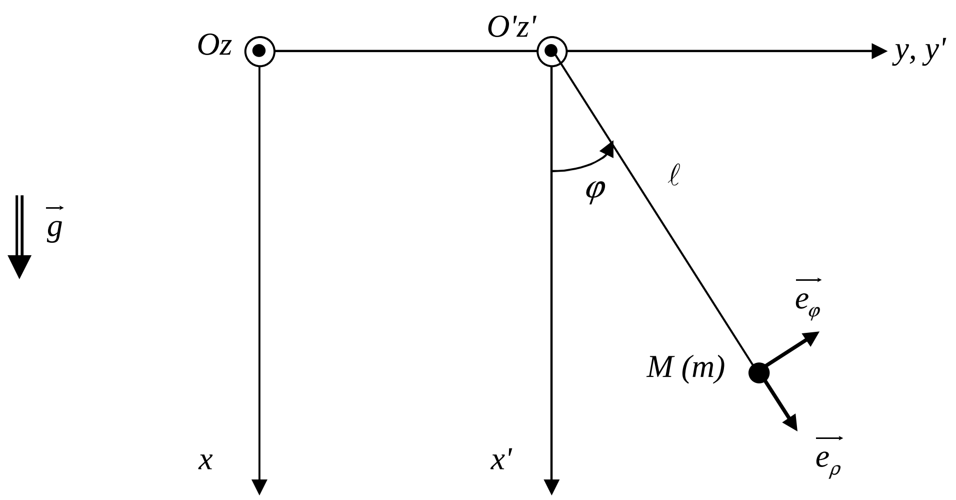
Exercice 1 : Pendule simple dans un référentiel en mouvement

On considère un pendule simple, de longueur $O'M = \ell = \text{cte}$, et de masse *m* fixée en *M*. A l'aide d'un vibreur, on impose à *O'* un mouvement oscillatoire suivant l'axe *Oy* du référentiel galiléen lié au laboratoire $\mathcal{R} = (O, xyz)$, dont *Ox* est la verticale descendante (Figure). On définit le repère $\mathcal{R}' = (O', x'yz')$, en translation rectiligne suivant *Oy* par rapport à $\mathcal{R}$. Le pendule tourne sans frottement autour de l'axe *O'z'*.

A l'instant $t = 0$, les origines des deux repères sont confondues. La position de *O'* est définie par $\overrightarrow{OO'} = a\sin(\omega t)\overrightarrow{e_y}$, où *a* est l'amplitude du mouvement de *O'*, et ω est la pulsation de l'oscillation.

On note $\vec{g}$ le champ de pesanteur terrestre, et $\varphi(t)$ l'angle que fait le pendule avec la verticale descendante.

Toutes les expressions des vecteurs seront données dans la base $\mathcal{B}_c = \left(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_z}\right)$ liée à $\mathcal{R}'$, en fonction de $\varphi(t)$ et de ses dérivées temporelles.



1- Vitesse et accélération par rapport à $\mathcal{R}'$

Déterminer la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R}')$ et l'accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R}')$ de M dans $\mathcal{R}'$.

2- Vitesses et accélérations dans $\mathcal{R}$

a) Le référentiel $\mathcal{R}'$ est-il galiléen ? Justifier.

b) Déterminer la vitesse d'entraînement $\vec{V_e}(M,\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ de M dans le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

c) Déterminer l'accélération d'entraînement $\vec{a_e}(M,\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ de M dans le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

d) Déterminer l'accélération de Coriolis $\vec{a_c}(M,\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ de M dans le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

e) Déduire des lois de composition des vitesses et des accélérations, la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et l'accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ de M dans $\mathcal{R}$.

3- Equation du mouvement dans $\mathcal{R}'$.

a) Réaliser le bilan des forces dans $\mathcal{R}'$. On notera $\vec{T} = T\,\vec{e}_\rho\,(T < 0)$, la tension du fil.

b) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique dans $\mathcal{R}'$, et déduire l'équation différentielle du mouvement de M dans $\mathcal{R}'$.

c) Déterminer l'expression de T.

4- Bilan énergétique

a) Déterminer l'expression de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ de M dans $\mathcal{R}'$..

b) Quelles sont les forces s'exerçant sur M et dérivant d'une énergie potentielle ? Peut-on donner leur expression ? Justifier.

Exercice 2 : Mouvement d'un satellite (*S*) de la Terre (*T*)

1- Force de gravitation

- **a)** Rappeler l'expression de la force de gravitation exercée par la Terre, de centre *T* et de masse M_T, sur un satellite de centre *S* et de masse M_S, gravitant autour de (*T*). On notera *G* la constante universelle de gravitation, et on introduira le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{TS}}{TS} = \dfrac{\vec{r}}{r}$.
- **b)** Préciser l'expression du champ de gravitation $\mathcal{G}_T(S)$ en fonction de *r*, *G* et M_T.

2- Trajectoire de (*S*)

- **a)** Définir le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_o$. Pour toute la suite de l'exercice, il sera considéré comme galiléen.
- **b)** Rappeler l'expression du théorème du moment cinétique au point fixe *T*, dans $\mathcal{R}_o$.
- **c)** En déduire que la trajectoire de (*S*) est plane.

Pour simplifier les équations, on introduit le repère $\mathcal{R}$, fixe par rapport à $\mathcal{R}_o$, tel que la trajectoire de (*S*) s'effectue dans le plan perpendiculaire à un vecteur unitaire $\overrightarrow{e_z}$ fixe. Le mouvement de (*S*) sera alors décrit par ses coordonnées polaires (r, θ), liée à la base polaire $\mathcal{B}_p = \left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}\right)$ du plan de la trajectoire.

- **d)** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{e_z}$ en fonction du moment cinétique de (*S*) en *T*.

3- Mouvement de (*S*) dans $\mathcal{R}$

- **a)** Déterminer l'expression de la vitesse $\vec{v}(S/\mathcal{R})$ de (*S*) dans $\mathcal{R}$, en fonction de r, $\dot{r}$ et $\dot{\theta}$.
- **b)** En déduire la loi des aires, et définir la constante des aires *C*.
- **c)** Montrer que si le mouvement du satellite est circulaire, alors il est uniforme. On se place dans ce cas là pour la suite de l'exercice.
- **d)** Déterminer l'expression de l'accélération $\vec{a}(S/\mathcal{R})$ de (*S*) dans $\mathcal{R}$ en fonction de r, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.
- **e)** Déduire de la relation fondamentale de la dynamique l'expression de la norme de la vitesse de (*S*), en fonction de *r*, *G* et M_T.
- **f)** Redémontrer la troisième loi de Képler, et en déduire le rayon *r* de la trajectoire, en fonction de *G*, M_T et de la période T_S du mouvement de (*S*).
- **g)** Quelle est la définition d'un satellite géostationnaire ? Donner approximativement son altitude.