Ex1/20,5

CORRECTION EXAMEN DE MECANIQUE DU POINT

Exercice 1 : Pendule simple dans un référentiel en mouvement

(3)

1- * $\overrightarrow{O'M} = \ell \overrightarrow{e_\rho}$ (0,5) $\Rightarrow$ $\vec{V}(M/\mathcal{R}') = \left[\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right]_{\mathcal{R}'}$ (0,5) $= \left[\frac{d\left(\ell \overrightarrow{e_\rho}\right)}{dt}\right]_{\mathcal{R}'} = \ell\left[\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right]_{\mathcal{R}'} = \ell\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$ (0,5)

$\Rightarrow$ $\vec{a}(M/\mathcal{R}') = \left[\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R}')}{dt}\right]_{\mathcal{R}'}$ (0,5) $= \left[\frac{d\left(\ell\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}\right)}{dt}\right]_{\mathcal{R}'} = -\ell\dot{\varphi}^2\overrightarrow{e_\rho} + \ell\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$ (1)

(8)

2- 1 a) $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne non uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ (0,5) $\Rightarrow$ $\mathcal{R}'$ non galiléen. (0,5)

2 b) $\vec{V}_e(M,\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{V}(O' \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}) + \underbrace{\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}_{=\vec{0}} \times \overrightarrow{O'M} = \left[\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right]_{\mathcal{R}'}$ (0,5) $= \left[\frac{d\left(a\sin(\omega t)\overrightarrow{e_y}\right)}{dt}\right]_{\mathcal{R}'} = a\omega\cos(\omega t)\overrightarrow{e_y}$ (0,5)

2 c) $\vec{a}_e(M,\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{a}(O' \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}) + \underbrace{\left[\frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}{dt}\right]_{\mathcal{R}'}}_{=\vec{0}} \times \overrightarrow{O'M} + \underbrace{\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}_{=\vec{0}} \times \left[\underbrace{\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}_{=\vec{0}} \times \overrightarrow{O'M}\right] = -a\omega^2\sin(\omega t)\overrightarrow{e_y}$ (0,5)

1 d) $\vec{a}_c(M,\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = 2\underbrace{\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}_{=\vec{0}} \times \vec{V}(M/\mathcal{R}') = \vec{0}$ (0,5)

2 e) * LCV : $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(M/\mathcal{R}') + \vec{V}_e(M,\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \ell\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + a\omega\cos(\omega t)\left(\sin\varphi\overrightarrow{e_\rho} + \cos\varphi\overrightarrow{e_\varphi}\right)$ (0,5) (0,5)

* LCA : $\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(M/\mathcal{R}') + \vec{a}_e(M,\mathcal{R}'/\mathcal{R}) + \vec{a}_c(M,\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = -\ell\dot{\varphi}^2\overrightarrow{e_\rho} + \ell\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} - a\omega^2\cos(\omega t)\left(\sin\varphi\overrightarrow{e_\rho} + \cos\varphi\overrightarrow{e_\varphi}\right)$ (0)

(5,5)

3- 0,5 a) $\Sigma\vec{F}(M/\mathcal{R}') = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$

3,5 b) * $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = ma\omega^2\sin(\omega t)\overrightarrow{e_y}$ (0,5) et $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c = \vec{0}$ (0,5)

* $\vec{T} = T\overrightarrow{e_\rho}$ $(T<0)$ et $\vec{P} = mg\left(\cos\varphi\overrightarrow{e_\rho} - \sin\varphi\overrightarrow{e_\varphi}\right)$ (0,5)

* RFD : $\Sigma\vec{F}(M/\mathcal{R}') = m\vec{a}(M/\mathcal{R}')$ (0,5)

* Projection suivant $\overrightarrow{e_\varphi}$: $-mg\sin\varphi + 0 + m\omega^2 OO'\cos\varphi = m\ell\ddot{\varphi}$ (1)

$\Rightarrow$ $\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = \omega^2 OO'\cos\varphi = a\omega^2\sin(\omega t)\cos\varphi}$ (0,5)

1,5 c) * Projection suivant $\overrightarrow{e_\rho}$: $mg\cos\varphi + T + m\omega^2 OO'\sin\varphi = -m\ell\dot{\varphi}^2$ (1)

* $\Rightarrow$ $\boxed{T = -m\left[\ell\dot{\varphi}^2 + g\cos\varphi + \omega^2 a\sin(\omega t)\sin\varphi\right]}$ (0,5)

(4)

4- 1 a) $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\left[\vec{v}(M/\mathcal{R}')\right]^2$ (0,5) $= \boxed{\frac{1}{2}m\left(\ell\dot{\varphi}\right)^2 = \mathcal{E}_c}$ (0,5)

3 b) * La tension $\vec{T}$ étant perpendiculaire au déplacement, elle ne travaille pas, et ne peut donc dériver d'une énergie potentielle. (0,5)

* La force d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_{ic} = \vec{0}$, car pas de rotation de $\mathcal{R}'/\mathcal{R}$. (0,5)

* Energie potentielle de pesanteur :

$d\mathcal{E}_{pp} = -\delta W\left(\vec{P}\right) = -mg\,dx \Rightarrow \mathcal{E}_{pp} = -mg\ell\cos\varphi + cte$ (1)

* Energie potentielle d'inertie d'entraînement : (1)

$d\mathcal{E}_{pie} = -\delta W\left(\vec{F}_{ie}\right) = +m\vec{a}_e \cdot d\vec{l} = -m\omega^2 a\sin(\omega t)\,dy$: y étant fonction du temps, il est impossible d'intégrer pour trouver $\mathcal{E}_{pie}$.

Ex2/22

Exercice 2 : Mouvement d'un satellite (S) de la Terre (T)

(2)

1-1 a) $\vec{F}_{grav}(M) = -GM_T M_S\frac{\overrightarrow{TS}}{TS^3} = -\frac{GM_T M_S}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ (1)

1 b) $\vec{F}_{grav}(M) = M_S\vec{\mathcal{G}}_T(S) \Rightarrow \vec{\mathcal{G}}_T(S) = -\frac{GM_T}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ (0,5) (0,5)

(5)

2-1 a) $\mathcal{R}_o$: centre T et trois axes correspondant à 3 étoiles considérées comme fixes.

1 b) $\left[\frac{d\overrightarrow{L_T}(M/\mathcal{R}_o)}{dt}\right] = \Sigma\overrightarrow{\mathcal{M}}_T\left(\vec{F}(M/\mathcal{R}_o)\right)$

2,5 c) * La seule force s'exerçant sur S est dirigée suivant $\overrightarrow{e_r}$ (force centrale) (0,5)

* $\Sigma\overrightarrow{\mathcal{M}}_T\left((M/\mathcal{R}_o)\right) = \overrightarrow{TS} \times \overrightarrow{F_{grav}} = \vec{0} \Rightarrow \left[\frac{d\overrightarrow{L_T}(M/\mathcal{R}_o)}{dt}\right] = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{L_T}(M/\mathcal{R}_o) = \overrightarrow{cte}$ (0,5) (0,5)

* $\overrightarrow{L_T}(M/\mathcal{R}_o) = \overrightarrow{TS} \times M_S\overrightarrow{v(S/\mathcal{R}_o)} = \overrightarrow{cte} \Rightarrow \overrightarrow{TS}$ et $\overrightarrow{v(S)}$ dans un même plan : mouvement plan (1)

0,5 d) $\overrightarrow{L_T}(M/\mathcal{R}_o) = \left\|\overrightarrow{L_T}(M/\mathcal{R}_o)\right\|\overrightarrow{e_z} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{e_z} = \frac{\overrightarrow{L_T}(M/\mathcal{R}_o)}{\left\|\overrightarrow{L_T}(M/\mathcal{R}_o)\right\|}}$

(15)

3-1,5 a) $\overrightarrow{TS} = r\overrightarrow{e_r}$ (0,5) $\Rightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{v(S/\mathcal{R})} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}}$ (0,5) (0,5)

4 b) * $\overrightarrow{L_T}(M/\mathcal{R}_o) = \overrightarrow{cte} \Rightarrow M_S r^2\dot{\theta} = cte$ (1) (1)

* aire dA balayée par $\overrightarrow{TS}$ pendant $dt = \frac{1}{2}\overrightarrow{r \cdot rd\theta} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}dt = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}dt \Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{L_T}{M_S} = cte}$ (1) : loi des aires (le rayon vecteur balaie des aires égales en des temps égaux).

* Constante des aires : $\boxed{C = r^2\dot{\theta}}$ (1)

1,5 c) mouvement circulaire $\Rightarrow$ $r = cte$ (0,5) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{v(S/\mathcal{R})} = r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = \frac{C}{r}\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{cte} \Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{v(S/\mathcal{R})}\right\| = \frac{C}{r} = cte}$ (1) : mouvement uniforme

1,5 d) $\overrightarrow{a(S/\mathcal{R})} = \underbrace{r\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}}_{(0,5)} - \underbrace{r\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}}_{(0,5)} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{a(S/\mathcal{R})} = -r\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}}$ (0,5) (mouvement uniforme : $\dot{\theta} = cte \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$)

1,5 e) * RFD : $\Sigma\vec{F}(M/\mathcal{R}) = M_S\vec{a}(M/\mathcal{R})$ (0,5)

* $-\frac{GM_T M_S}{r^2}\overrightarrow{e_r} = -M_S r\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} = -M_S\frac{v^2}{r}\overrightarrow{e_r}$ (0,5) $\Rightarrow$ $\boxed{v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}}$ (0,5)

3 f) $\frac{dA}{dt} = \frac{\pi r^2}{T}$ (0,5) $= \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}rv = \frac{1}{2}r\sqrt{\frac{GM_T}{r}}$ (0,5) $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{4\pi^2}{GM_T} = \frac{T_S^2}{r^3}}$ (1) $\Rightarrow$ $\boxed{r = \left(\frac{GM_T T_S^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}}$ (1)

2 g) * satellite géostationnaire : fixe par rapport à la Terre ou toujours à la verticale du même point de la Terre (1)

* $h \approx 36.000$ km (1)