EXAMEN DE MECANIQUE - 2H

Les grandeurs vectorielles sont écrites en gras

Mécanique du point

Mouvement d'une particule chargée dans des champs électrique et magnétique croisés
(les parties 1, 2-1 et 2-2 sont indépendantes)

1- Mouvement sous l'effet du champ magnétique

Une particule M de masse *m* et de charge *q* se déplace dans un champ magnétique stationnaire et uniforme, $\mathbf{B} = B\,\mathbf{e_z}$. On note *R* (O $\mathbf{e_x}\,\mathbf{e_y}\,\mathbf{e_z}$) le référentiel d'observation. Le champ magnétique exerce sur la charge en mouvement l'unique force :

$\mathbf{F_B} = q\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ où $\mathbf{v} = \mathbf{v_{M/R}}$, le vecteur vitesse de M observé dans *R*.

1-1-a : A partir de la relation fondamentale de la dynamique, déduire les équations différentielles scalaires relatives aux composantes v_x, v_y et v_z de **v**. *(ne pas les résoudre)*

1-1-b :Vérifier que la solution suivante convient :

$v_x = -A\cos(\omega t)$ avec $\omega = qB/m$
$v_y = A\sin(\omega t)$
$v_z = \text{constante} = D$

1-1-c : Déterminer A et D lorsque la vitesse initiale de la particule est $\mathbf{v}(t = 0) = -v_o\,\mathbf{e_x}$.
Calculer alors la norme de la vitesse.

1-1-d : Retrouver ce résultat par le théorème de l'énergie cinétique de la façon suivante :
- Que vaut le travail de la force magnétique?
- Enoncer le théorème de l'énergie cinétique
- En déduire l'énergie cinétique puis la norme de la vitesse.

1-2-a : Déterminer x(t) et y(t) dans le cas où la particule est en O à l'instant t = 0.

1-2-b : En déduire que le trajectoire est un cercle de centre C (a, 0) et de rayon $a = mv_o/qB$

2- Mouvement sous l'effet de champs électrique et magnétique croisés

La particule est maintenant observée dans un référentiel R_1(O_1 $\mathbf{e_x}$ $\mathbf{e_y}$ $\mathbf{e_z}$) tel que O_1 a pour vitesse dans *R* : $\mathbf{v_{O1/R}} = -v_o\,\mathbf{e_x}$. La particule est au repos à l'instant t =0 et se met en mouvement sous le seul effet des champs croisés suivants :

- Champ magnétique $\mathbf{B} = B\,\mathbf{e_z}$, exerçant la force $\mathbf{F_B} = q\,\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{B}$ où $\mathbf{v_1} = \mathbf{v_{M/R1}}$ est le vecteur vitesse de M observé dans R_1.
- Champ électrique $\mathbf{E} = E\,\mathbf{e_x}$, exerçant la force $\mathbf{F_E} = q\mathbf{E}$.

2-1-a : Ecrire les nouvelles équations différentielles relative aux composantes v_{x1} , v_{y1} et v_{y1} de $\mathbf{v_1}$

2-1-b : La solution générale de ces équations différentielles est **(vous n'avez pas à le démontrer)** :

$v_{x1} = -A_1\cos(\omega t) + E/B$ avec $\omega = qB/m$
$v_{y1} = A_1\sin(\omega t)$
$v_{z1} = \text{constante} = D_1$

2-1-b-i : Déterminer A_1 et D_1 lorsque $\mathbf{v_1}(t=0) = \mathbf{0}$.

2-1-b-ii : Pourquoi peut-on affirmer que $\mathbf{v} = \mathbf{v_1} - v_o.\mathbf{e_x}$? Quelle doit être la valeur de v_o pour que v_{x1} et v_{y1} aient la même expression que v_x et v_y au 1-1-c ?

2-2 Etude cinématique

Pour alléger les notations, on décrira le mouvement de la particule dans R_1 par les équations :

$v_{x1} = -a\omega\cos(\omega t) + a\omega$ et $\varphi(t) = \omega t$

$v_{y1} = a\omega \sin(\omega t)$

$v_{z1} = 0$

2-2-a : Exprimer $x_1(t)$, $y_1(t)$ et $z_1(t)$ sachant que la particule est en O_1 à l'instant t = 0

2-2-b : Calculer la norme du vecteur vitesse en fonction de a, ω et φ/2.

Pour cela, on utilisera les relations trigonométriques suivantes :

$$1-\cos\alpha = 2.\sin^2\alpha/2$$

$$\sin\alpha = 2.\sin\alpha/2\,.\cos\alpha/2$$

Pour quelles valeurs de φ(t) la norme de la vitesse est-elle nulle ?

2-2-c : Calculer les composantes cartésiennes puis la norme du vecteur accélération $\mathbf{a_1} = \mathbf{a_{M/R1}}$

2-2-d : Ecrire la relation donnant les composantes de l'accélération dans la base locale de Frenet

2-2-e : Calculer successivement :

i : l'accélération tangentielle,

ii : l'accélération normale,

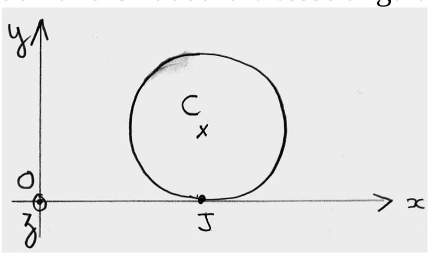
iii : le rayon de courbure de la trajectoire.

Que vaut ce rayon de courbure aux trois instants tels que : $\varphi=0$, $\varphi=\pi$ et $\varphi = 2\pi$?

Mécanique du solide

(les parties 1,2 et 3 sont indépendantes)

Un disque *D* homogène, de masse *m*, de rayon *a* et de centre C(x, *a*) se déplace sur l'axe Ox du référentiel *R*(O $\mathbf{e_x}\,\mathbf{e_y}\,\mathbf{e_z}$) tout en tournant autour de l'axe Cz avec la vitesse angulaire ω (cf. figure).



1- a : Exprimer le vecteur vitesse angulaire (appelé aussi vecteur rotation instantanée) du disque, $\mathbf{\Omega_{D/R}}$.

b : Ecrire la relation donnant le champ des vitesses d'un solide.

c : En déduire la relation entre les vitesses $\mathbf{v_{C/R}}$ et $\mathbf{v_{J/R}}$ (J, point matériel appartenant au disque coïncidant avec le point géométrique de contact au temps t).

d : En déduire la relation entre dx/dt et dφ/dt pour qu'il y ait roulement sans glissement.

2- Etablir $\underline{I_C}$ la matrice d'inertie en C dans la base $(\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z})$.

On expliquera pourquoi les produits d'inertie sont nuls et l'on admettra la relation suivante entre les moments d'inertie : $I_x + I_y = I_z$.

3- On pourra traiter cette question sans préciser les expressions de I_x, I_y et I_z.

a : Définir R^*, le référentiel du centre de masse.

b : Déterminer $\mathbf{L}^*$ moment cinétique du disque en C.

c : En déduire E^*_k énergie cinétique du disque dans le référentiel R^*

d : Enoncer le théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique. Déterminer E_k, énergie cinétique du disque dans le référentiel *R* .