Examen de mécanique (Corrigé) — Barèmes (21) ou (21) / (7) ou (8)

Mécanique du point

1-1-a $m\vec{a}_{M/R} = q\vec{v}\wedge\vec{B} = q\begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix}$ 0,5 — 2

$\dot{v}_x = \frac{qB}{m} v_y \quad \dot{v}_y = -\frac{qB}{m} v_x \quad \dot{v}_z = 0$ 3×0,5

1-b $\dot{v}_x = A\omega \sin\omega t$, $\dot{v}_y = A\omega\cos\omega t$, $\dot{v}_z = \dot{D} = 0$; $A\omega \sin\omega t = \omega A \sin\omega t$ 0,5 ; $A\omega\cos\omega t = -\omega(-A\cos\omega t)$ 0,5 — 1

1-c à $t=0$ $v_x = -v_0$ $v_y = 0$ $v_z = 0$

$-v_0 = -A \quad 0 = 0 \quad 0 = D$

$\|\vec{v}_p\| = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = A = v_0$ 1 — 1 ou ~~1,5~~

1-d $\delta W_B = 0$ car $\vec{F}_B \perp d\vec{OM}$ 0,5 — 1 ou ~~1,5~~

$d\mathcal{E}_{c/R} = \delta W \Rightarrow \mathcal{E}_c = cte$ 0,5

$\mathcal{E}_c = cte = \mathcal{E}_c(t=0) = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow \|\vec{v}\| = v_0$

1-2-a $x = -\frac{A}{\omega}\sin\omega t + cte \quad 0 = 0 + cte \quad x = -\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$ 0,5 — 1

$y = -\frac{A}{\omega}\cos\omega t + cte \quad 0 = -\frac{A}{\omega} + cte \quad y = \frac{v_0}{\omega}(1-\cos\omega t)$ 0,5

2-b $\frac{x^2}{(v_0/\omega)^2} + \frac{(y - \frac{v_0}{\omega})^2}{(v_0/\omega)^2} = \cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$ — 1

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-y_c)^2}{a^2} = 1$ rayon a $C\begin{vmatrix} 0 \\ v_0/\omega \end{vmatrix}$ 1

---

(7) ou (8)

2-1-a $\dot{v}_{x_1} = \frac{qB}{m} v_{y_1} + \frac{q}{m} E \quad \dot{v}_{y_1} = -\frac{qB}{m} v_{x_1}, \quad \dot{v}_{z_1} = 0$ 1 — 1

2-1-b i. $v_{1x}(t=0) = v_{1y}(t=0) = v_{1z}(t=0) = 0$ — 1 ou 1,5

$0 = -A_1 + E/B \quad A_1 = E/B$ 0,5

$0 = 0$

$0 = D_1$ 0,5

ii. Référentiels en translation (pas de rotation) 0,5 — 1

$v_x = v_{1x} - v_0 \quad -\omega_0\cos\omega t = \underbrace{-\frac{E}{B}\cos\omega t + \frac{E}{B}}_{v_{1x}}$

$\Rightarrow v_0 = E/B$ 0,5

2-2-a $x_1(t) = -a\sin\omega t + a\omega t + cte \quad 0 = 0 + 0 + cte$ — 1 ou 1,5

$y_1(t) = -a\cos\omega t + cte \quad 0 = -a + cte$

$x_1(t) = -a\sin\omega t + a\omega t$ 0,5

$y_1(t) = a(1-\cos\omega t)$ 0,5

2-b $\|\vec{v}_1\| = \{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\}^{1/2} = a\omega\{(1-\cos\omega t)^2 + \sin^2\omega t\}^{1/2}$ — 1

$= a\omega\{4\sin^4\omega t/2 + 4\sin^2\omega t/2 \cos^2\omega t/2\}^{1/2}$

$= a\omega\{4\sin^2\omega t/2\,(\sin^2\omega t/2 + \cos^2\omega t/2)\}^{1/2}$

$= 2a\omega|\sin\omega t/2| = 2a\omega\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|$ 1

nul pour $\varphi/2 = k\pi$ ($\varphi = 2k\pi$)

s'annule pour $\varphi/2 = k\pi$ $\quad \varphi = 2k\pi$

2-2-c $\quad a_{x_1} = a\omega^2 \sin \omega t \quad a_{y_1} = a\omega^2 \cos\omega t \quad a_{z_1} = 0$

$\|\vec{a}_1\| = a\omega^2$ 0,5 $\qquad$ 0,5

2-2-d $\quad \vec{a}_1 = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \dfrac{d\|\vec{v}_1\|}{dt}\vec{e}_t + \dfrac{v_1^2}{\rho_c}\vec{e}_n$ 0,5

2-2-e $\quad a_t = a\omega^2 \cos\dfrac{\varphi}{2} \quad (\dot\varphi = \omega)$ 0,5

$a^2\omega^4 = a^2\omega^4\cos^2\dfrac{\varphi}{2} + a_n^2$

$a_n = a\omega^2 \sin\dfrac{\varphi}{2}$ 0,5 $\qquad$ 1,5

$\dfrac{v^2}{\rho_c} = \dfrac{4a^2\omega^2\sin^2\frac{\omega t}{2}}{\rho_c} = a\omega^2 \cancel{\sin\frac{\omega t}{2}}$

$\rho_c = 4a\sin\omega t/2 = 4a\sin\varphi/2$

$\rho_c = 0\ (\varphi = 0)\ ;\ 4a\ (\varphi = \pi)\ ;\ 0\ (\varphi = 2\pi)$

Mécanique du solide.

7 ou 8

1 - a - $\vec{\Omega}_{D/R} = \dot\varphi\,\vec{e}_z = \omega\,\vec{e}_z$ $\quad$ Rem : (ω algébrique) $\qquad$ 0,5

b. $\vec{v}_{A/R} = \vec{v}_{B/R} + \vec{\Omega}\wedge\vec{BA}$ (ou $\vec{AB}\wedge\vec{\Omega}$) $\qquad$ 0,5

c - $\vec{v}_{J/R} = \vec{v}_{C/R} + \vec{\Omega}\wedge\vec{CJ} = \dot x\,\vec{e}_x + \omega\,\vec{e}_z \wedge(-a\,\vec{e}_y)$ $\qquad$ 1 ~~ou 1,5~~

$= (\dot x + a\omega)\,\vec{e}_x$

d - $\vec{v}_{J/\Lambda} = \vec{v}_{J/R} = (\dot x + a\omega)\vec{e}_x = \vec{0}$ $\quad \boxed{\dot x + a\omega = 0}$ $\qquad$ 0,5

2 - $I_{xz} = I_{yz} = 0$ car $z = 0$ $\quad I_{xy} = 0$ par symétrie $\qquad$ 0,5

$I_z = \displaystyle\int_0^a r^2\,\delta m = \int_0^a r^2 \frac{m}{\pi a^2}\,2\pi r\,dr = \frac{2m}{a^2}\int_0^a r^3\,dr = \frac{ma^2}{2}$ $\qquad$ 1

$I_x = I_y = I_z/2 = \dfrac{ma^2}{4}$ $\qquad$ 0,5

$\underline{I}_c = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{4} & & \\ & \frac{ma^2}{4} & \\ & & \frac{ma^2}{2}\end{pmatrix}$

3 - a - axes // ceux de R origine C $\qquad$ 0,5

b - $\vec{L}^* = \underline{I}_c\,\vec{\Omega} = \dfrac{ma^2\omega}{2}\,\vec{e}_z$ $\qquad$ 0,5

c - $\mathcal{E}_{c}^{*} = \dfrac{1}{2}\vec{L}^*\cdot\vec{\Omega} = \dfrac{1}{2}\dfrac{ma^2\omega^2}{2} = \dfrac{1}{4}ma^2\omega^2$ $\qquad$ 0,5

d - $\mathcal{E}_{c/R} = \mathcal{E}_c^* + \dfrac{1}{2}m v_c^2$ $\quad$ 0,5

$= \dfrac{1}{4}ma^2\omega^2 + \dfrac{1}{2}m\dot x^2$ $\qquad$ 1 ~~ou 1,5~~

$= \dfrac{3}{4}ma^2\omega^2$ si roulement sans glissement. $\quad$ 0,5