UNIVERSITE PAUL SABATIER TOULOUSE III

Licence 1 – semestre 2
Sciences de l'Ingénieur et Préparation aux Concours — Juin 2006

EXAMEN DE MECANIQUE – 2 HEURES

Remarques préliminaires :

- ***Par convention typographique toutes les grandeurs vectorielles sont imprimées en gras,***
- ***Le barème est seulement donné à titre indicatif,***
- ***Des réponses argumentées, une copie propre et bien rédigée seront appréciées par les correcteurs. <u>En particulier, toutes les grandeurs introduites dans les formules demandées ou nécessaires devront être clairement définies</u>.***

Mécanique du point (12 points)

Questions de cours (3 points)

1.) Définir : * le moment cinétique en O, dans le référentiel R, d'un objet ponctuel M, de masse m, de vitesse $\mathbf{v}_{M/R}$.
   * le moment en O de la force $\mathbf{F}$ que subit M.

2.) Qu'est-ce qu'une force conservative ?

Exercice (9 points) : L'électrophorèse

L'électrophorèse est une des nombreuses techniques de séparation d'espèces chimiques : des particules chargées sont placées dans un champ électrique créé par une tension continue et se déplacent vers le pôle de signe opposé à leur charge. Le Suédois Tisélius mit en œuvre cette technique de séparation pour les protéines du sérum sanguin et du lait, ce qui lui valut le prix Nobel en 1948. Depuis lors, cette technique n'a de cesse de s'améliorer et est ainsi devenue un outil indispensable dans de nombreux laboratoires de recherche et dans l'industrie.

Dans cet exercice, nous étudierons le cas de l'influence d'un champ électrique sur un ion simple en solution.

La solution est dans une cuve et l'on se propose d'étudier par rapport au référentiel d'observation $R=(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ lié à la cuve ($\mathbf{e}_z$ sera la verticale montante), le mouvement d'un ion I de masse m, de charge q.
L'ion se déplace sous l'effet des forces suivantes :

- force électrostatique $\mathbf{F}_E=q\mathbf{E}$ ($\mathbf{E}$, champ électrique appliqué : $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$ avec E constante >0),
- force de frottement due à la solution $\mathbf{F}_f = -\alpha\,\boldsymbol{v}$ (α constante positive, $\mathbf{v}$ écriture simplifiée du vecteur vitesse $\mathbf{v}_{I/R}$),
- son poids $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ où $\mathbf{g}$ est le vecteur accélération de pesanteur.

A l'instant initial t=0, l'ion est en O et sa vitesse est $\boldsymbol{v}(t=0) = \boldsymbol{v}_o = v_o\mathbf{e}_x$ avec $v_o>0$.

Données numériques :
Ion : Na^+ (11 protons + 12 neutrons + 10 électrons, $m_p = m_n$=1,675 10^{-27} kg, m_e= 0,911 10^{-30} kg)
$E = 10^5$ V.m^{-1}
$\alpha = 4.\ 10^{-12}$ N.m^{-1}.s
$v_o = 10^{-3}$ m.s^{-1}
$g = 9{,}81$ m.s^{-2}
charge électrique élémentaire : q_e=1,6 10^{-19} C

1.) a.) Comparer les modules de $\mathbf{F_E}$, $\mathbf{F_f}$ (à t=0) et **P.** Justifier que l'on puisse négliger l'influence du poids.
b.) Quelle différence de nature physique le physicien fait-il entre $\mathbf{F_E}$ et $\mathbf{F_f}$?

2.) a.) Par application de la relation fondamentale de la dynamique, donner l'expression de $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ et $\dot{z}(t)$ en fonction du temps t et des constantes du problème.
b.) Quel est l'ordre de grandeur du temps au bout duquel on pourra considérer la vitesse comme constante ? Commentaire. Quelle est l'expression de cette vitesse constante ainsi atteinte ? Application numérique.

3.) On veut comparer les vitesses atteintes en présence et en l'absence de frottement.
a.) En l'absence de frottement, donner l'expression de $v(x)$, vitesse de I en fonction de la variable de position x. Pour cela, on utilisera au choix le théorème de l'énergie cinétique ou celui de l'énergie mécanique.
b.) Application numérique : que vaudrait $v(x)$ en x =1cm ? Comparer avec la situation réelle dans laquelle on supposera que la particule atteint immédiatement sa vitesse constante.

Suite du sujet page suivante

Mécanique du solide (8 points)

Questions de cours (3 points) :

1.) Écrire le théorème de Koenig pour l'énergie cinétique d'un système de N points matériels $\{A_i, m_i\}$, en explicitant les différents termes.

2.) On considère, dans un référentiel R(Oxyz), deux points A et B appartenant à un solide (S). Donner la relation exprimant le champ de vitesse du solide (S).

3.) a.) Définir la vitesse de glissement d'un solide S_1 en contact ponctuel I (I point géométrique du contact) avec un autre solide S_2.
b.) Quelle est la condition de roulement sans glissement de S_1 par rapport à S_2 ?

Exercice (5 points) : Mondial 2006

On se propose d'établir les éléments cinétiques d'un ballon idéal nécessaires à la description dynamique de son mouvement observé depuis un référentiel cartésien associé au stade, $R = (O, \mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z})$.

1.) Détermination de la matrice d'inertie du ballon.
Un ballon idéal est constitué d'une coquille sphérique de masse *m*, d'épaisseur négligeable, dont tous les points matériels sont situés à une même distance *a* du centre C.

a.) Expliquer clairement pourquoi la matrice d'inertie du ballon $\mathbf{[I]_C}$, prend la forme suivante :

$$[\ I\ ]_C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}_{e_x,e_y,e_z}$$

dans laquelle on précisera le nom de chacun des termes de la diagonale.

A défaut de faire les calculs des 3 termes α, β et γ (questions b.), c.) et d.) qui suivent), continuer l'exercice avec α, β et γ comme valeurs.

b.) Montrer que $\alpha = \beta = \gamma$

c.) Montrer que $\alpha+\beta+\gamma = 2\ I_C$ où I_C est le moment d'inertie par rapport à C : $I_C = \iint (x^2+y^2+z^2)\rho_s dS$ où ρ_s est la densité surfacique du ballon.

d.) Calculer I_C. En déduire l'expression de α, β, γ.

2.) Expression et calcul des grandeurs cinétiques

a.) Exprimer le moment cinétique $\boldsymbol{L}_{C/R^*}$ sachant que le ballon est animé d'un mouvement de rotation caractérisé par $\mathbf{\Omega_{ballon/R^*}} = \Omega_x\mathbf{e_x} + \Omega_y\mathbf{e_y} + \Omega_z\mathbf{e_z}$.

b.) Dans le cas particulier où $\mathbf{\Omega_{ballon/R^*}} = \Omega_x\mathbf{e_x}$, exprimer $\boldsymbol{L}_{C/R^*}$ puis l'énergie cinétique $E_k^* = E_{k/R^*}$.

c.) Exprimer $E_{k/R}$ à l'instant initial sachant que le ballon est lancé avec la vitesse $\boldsymbol{v}(t=0) = v_o\mathbf{e_y}$. Application numérique pour m = 400 g, a = 11 cm, v_o =100 km.h^{-1}, et Ω=5 tours.s^{-1}.