Examen de mécanique - Juin 2006

Mécanique du point

Questions de cours

1) • $\vec{L}_{O/R} = \vec{OM} \wedge m\,\vec{v}_{M/R}$ 0,5

• $\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{OM} \wedge \vec{F}$ 0,5

2) force conservative : force dont le travail ne dépend pas du chemin suivi (ou énergie potentielle associée) 0,5

Electrophorèse :

1) a) $F_E = qE = 1 \times q_e \times E \sim 10^{-14}\ N$ 0,5

$F_f(t=0) = \alpha\, v_0 = 4.10^{-15}\ N$ 0,5

$P = mg = 23\, m_n\, g + 10\, m_e\, g \sim (23.10^{-26} + 10.10^{-28})\ N$ 0,5

↳ $P \ll F_E$ et $P \ll F_f$ 0,5

b) $\vec{F}_E$ force conservative / $\vec{F}_f$ force non conservative 0,5

2) a) $\vec{F}_E + \vec{F}_f = m\vec{a}$ 0,5

$$\hookrightarrow \begin{vmatrix} qE \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_R + \begin{vmatrix} -\alpha\dot{x} \\ -\alpha\dot{y} \\ -\alpha\dot{z} \end{vmatrix}_R = m \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix}_R \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} = \frac{qE}{m} \\ \ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} = 0 \\ \ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} = 0 \end{cases}$$ 0,5 ; 0,5 ; 0,5

$$\rightarrow X(t) = \dot{x}(t) = A\,e^{-\frac{\alpha}{m}t} + \frac{qE}{\alpha} \xrightarrow{\text{C.I.}} \dot{x}(t) = \left(v_0 - \frac{qE}{\alpha}\right)e^{-\frac{\alpha}{m}t} + \frac{qE}{\alpha}$$ 1

$$Y(t) = \dot{y}(t) = B\,e^{-\frac{\alpha}{m}t} \xrightarrow{\text{C.I.}} \dot{y}(t) = 0$$ 0,5

$$Z(t)\ \ \dot{z}(t) = C\,e^{-\frac{\alpha}{m}t} \xrightarrow{\text{C.I.}} \dot{z}(t) = 0$$ 0,5

b) $v(t) = \dot{x}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} v_{lim}$ au bout de quelques $\tau = \frac{m}{\alpha}$ 0,5

$$\tau = \frac{23\,m_n + 10\,m_e}{\alpha} \approx \frac{10^{-26}}{10^{-12}} = 10^{-14}\ s$$

↳ v_{lim} atteinte ~ instantanément 0,5

$$v_{lim} = \frac{qE}{\alpha} = \frac{1{,}6.10^{-19}.10^5}{4.10^{-12}} = \frac{1{,}6}{4}10^{-2} = 4.10^{-3}\ m\,s^{-1}$$ 0,5 + 0,5

3) a) $\Delta E_c = W(q\vec{E}) \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m v_0^2 = \int_0^x q\vec{E}\cdot\vec{dl} = qEx$ 0,5 + 0,5

↳ $v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2qEx}{m}}$ 0,5

b) $v(x = 1\,cm) = \sqrt{v_0^2 + \frac{2 \times 1{,}6.10^{-19} \times 10^5 \times 10^{-2}}{23 \times 1{,}675\,10^{-27}}} = \sqrt{v_0^2 + 8\,10^9}$

$\simeq 10^5\ m\,s^{-1}$ 0,25

↳ $v(x = 1\,cm)$ ss frottement $\gg v_{lim}$ 0,25

Mécanique du solide

Questions de cours :

1) $E_c = E_c^* + \frac{1}{2}(\Sigma m_i) v_{C/R}^2 = \Sigma \frac{1}{2} m_i v_i^{*2} + \frac{1}{2}(\Sigma m_i) v_{C/R}^2$	1 (Hors barème)
2) $\vec{v}_{A/R} = \vec{v}_{B/R} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{S/R}$	0,5
3) a) $\vec{v}_{g\,1/2} = \vec{v}_{I_1/R} - \vec{v}_{I_2/R}$	0,5
b) CRSG $\Rightarrow \vec{v}_{g\,1/2} = \vec{0}$	0,5

Mondial 2006 :

1) a) Cx, Cy et Cz axes de symétrie matérielle $\Rightarrow$ Cx, Cy et Cz axes principaux	0,5
↳ d'où la forme proposée avec α : moment d'inertie par rapport à Cx ; β et γ : etc.	0,5
b) $\alpha = \iint (y^2+z^2)\rho\, dS$; $\beta = \iint (x^2+z^2)\rho\, dS$; $\gamma = \iint (x^2+y^2)\rho\, dS$	0,5
↳ compte tenu de la symétrie, ces 3 intégrales donnent le même résultat	
c) $\alpha + \beta + \gamma = 2 I_C$ (cf expression de α, β et γ ci-dessus)	0,5
d) $I_C = \iint (x^2+y^2+z^2)\rho\, dS = \iint a^2 \rho\, dS = a^2 \iint \rho\, dS = a^2 m$	0,5
↳ $\alpha = \beta = \gamma = \frac{2}{3} a^2 m$	0,5
2) a) $\vec{L}_{C/R^*} = [I]_C \cdot \vec{\Omega}_{b/R^*} = \begin{vmatrix} 2/3\, a^2 m\, \Omega_x \\ 2/3\, a^2 m\, \Omega_y \\ 2/3\, a^2 m\, \Omega_z \end{vmatrix}_R$	0,5 + 0,5
b) $\vec{L}_{C/R^*} = \frac{2}{3} a^2 m\, \Omega_x\, \vec{e_x}$	0,5
↳ $E_k^* = \frac{1}{2} \vec{L}_{C/R^*} \cdot \vec{\Omega}_{b/R^*} = \frac{1}{3} a^2 m\, \Omega_x^2$	0,5 + 0,5
c) $E_{k/R}(t=0) = E_k^* + \frac{1}{2} m v_0^2$	0,5
<u>AN</u> : $E_{k/R} = \frac{1}{3}(0{,}11)^2 \cdot 0{,}4 \cdot (5 \cdot 2\pi)^2 + \frac{1}{2}\, 0{,}4 \left(\frac{100\,000}{3600}\right)^2$	
$= 1{,}6 + 154{,}3 = 155{,}9$ J.	0,5