Université de Toulouse
Université Paul Sabatier
TOULOUSE III

L1 PCP

Travaux dirigés de mécanique du point

Année 2010-2011

Présentation

Tous les exercices de mécanique du point qui seront abordés en Travaux Dirigés cette année se trouvent dans ce fascicule.

Ces exercices sont regroupés par thème. Chacun des thèmes est introduit par un personnage historique, dont les travaux ont contribué à l'avancement du thème considéré. Puis, les objectifs du thème sont énoncés.

On trouve ensuite un questionnaire, type QCM, comportant des questions de cours : il est nécessaire de le faire seul, chez soi, et avant de venir en TD. C'est un travail préparatoire, qui permet de s'assurer que les notions de base requises pour la résolution des exercices sont bien comprises. Le questionnaire sera corrigé très rapidement en TD, et l'étudiant peut alors s'évaluer selon le barème ci-dessous.

Chaque question est notée de 0 à 2 points :

- Pas de réponse : 0 point
- Aucune erreur : 2 points
- 1 erreur : 1 point
- 2 erreurs et plus : 0 point

Le niveau d'acquisition des connaissances est évalué en fonction du nombre de total de points recueillis pour l'ensemble des questions :

Total (par exemple, avec 5 questions, donc un maximum de 10 points)

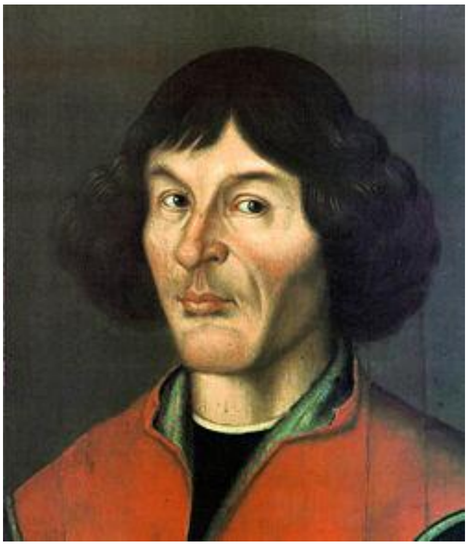
• Connaissances acquises	Supérieur à 7	☺
• Connaissances en voie d'acquisition	De 4 à 7	😐
• Connaissances non acquises	Inférieur à 4	☹

Il est recommandé aux étudiants de préparer la séance de travaux dirigés, en cherchant les différents exercices du thème. Par contre, tous les exercices du thème ne seront pas traités en TD : certains sont laissés en Travail Personnel (TP).
Tout exercice préparé à l'avance pourra être rendu à l'enseignant, qui le corrigera, et le rendra la semaine suivante. De même, pour les exercices en TP : **aucune correction ne sera distribuée**. Il est donc très vivement conseillé de faire ces exercices et de les rendre à l'enseignant de TD, à titre d'entraînement.

Le contrôle des connaissances s'effectue de manière régulière, sous des formes diverses, telles que QPL (questionnaire à place limitée), QCM (questionnaire à choix multiples), ou énoncé classique. Le choix de la forme du CC ne sera pas donné aux étudiants, et pourra être différent d'un CC à l'autre. Des Devoirs Maison pourront également être demandés.

L'équipe enseignante

Thème 1 :
Calcul vectoriel, systèmes de coordonnées et dérivation de vecteurs

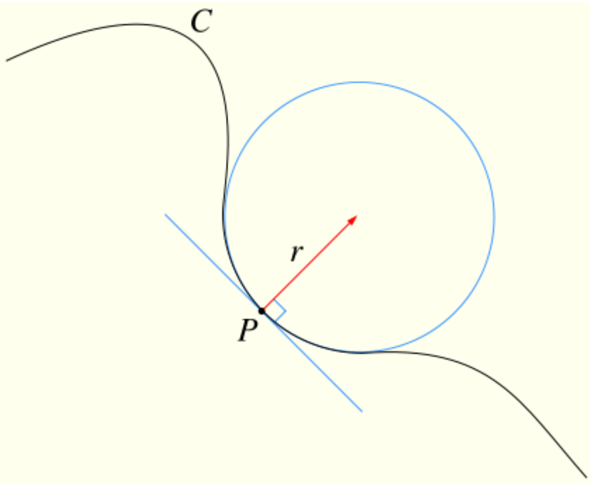


Nicolas Copernic (1473-1543)

Copernic énonce la théorie selon laquelle le Soleil se trouve au centre de l'univers, et la Terre, que l'on croyait auparavant centrale, tourne autour de lui.

Objectifs :

- Différencier une base et un repère.
- Calculer la norme d'un vecteur, les produits scalaire et vectoriel entre deux vecteurs.
- Définir une base orthonormée.
- Calculer les projections d'un vecteur sur les axes d'un repère orthonormé.
- Définir les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques, intrinsèques.
- Calculer les dérivées d'un vecteur de base et d'un vecteur quelconque dans un repère donné.



Tangente et cercle de courbure en un point P de la courbe C

Questionnaire :

1. Le produit scalaire de deux vecteurs quelconques $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$:
   - ○ Est un vecteur perpendiculaire au plan constitué par les deux vecteurs.
   - ○ Est un nombre sans dimensions.
   - ○ Est fonction de $\cos\left(\vec{v_1},\vec{v_2}\right)$.
   - ○ Est fonction de $\sin\left(\vec{v_1},\vec{v_2}\right)$.
   - ○ Aucune réponse n'est correcte.

2. Le produit vectoriel de deux vecteurs quelconques $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$:
   - ○ Est un vecteur perpendiculaire au plan constitué par les deux vecteurs.
   - ○ Est un nombre sans dimensions.
   - ○ Est fonction de $\cos\left(\vec{v_1},\vec{v_2}\right)$.
   - ○ Est fonction de $\sin\left(\vec{v_1},\vec{v_2}\right)$.
   - ○ Aucune réponse n'est correcte.

3. Les vecteurs normés $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ constituent une base $\mathscr{B}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right)$ orthonormée directe. Alors :
   - ○ 2 au moins des trois vecteurs sont perpendiculaires entre eux.
   - ○ $\vec{e_1}\times\vec{e_2}=\vec{e_3}$.
   - ○ En amenant $\vec{e_1}$ sur $\vec{e_2}$, on obtient $\vec{e_3}$, en tournant dans le sens horaire.
   - ○ En amenant $\vec{e_1}$ sur $\vec{e_2}$, on obtient $\vec{e_3}$, en tournant dans le sens direct.
   - ○ Aucune réponse n'est correcte.

4. Concernant le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$:
   - ○ Si $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, alors les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.
   - ○ Si $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, alors les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.
   - ○ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ est caractéristique du périmètre du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
   - ○ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ est caractéristique de la surface du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
   - ○ Aucune réponse n'est correcte

5. Concernant le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$:
   - ○ Si $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, alors, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.
   - ○ Si $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, alors les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.
   - ○ $\vec{a}\times\vec{b}$ est caractéristique du périmètre du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
   - ○ $\vec{a}\times\vec{b}$ est caractéristique de la surface du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
   - ○ Aucune réponse n'est correcte

Exercices :

Exercice 1 : Produits de vecteurs

Soit les trois vecteurs: $\vec{a}(1,2,2)$, $\vec{b}(2,2\sqrt{2},2)$ et $\vec{c}(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$.

a) **Calculer** $\|\vec{a}\|, \|\vec{b}\|, \|\vec{c}\|$, et en déduire les expressions des vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_a}$, $\overrightarrow{e_b}$, $\overrightarrow{e_c}$ des directions de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

b) En considérant les angles θ_a, θ_b et θ_c compris entre 0 et π, **calculer** :

$$\cos\theta_a = \cos\left(\overrightarrow{e_b},\overrightarrow{e_c}\right),\ \cos\theta_b = \cos\left(\overrightarrow{e_a},\overrightarrow{e_c}\right) \text{ et } \cos\theta_c = \cos\left(\overrightarrow{e_b},\overrightarrow{e_a}\right).$$

c) **Calculer** les composantes des vecteurs $\overrightarrow{u_a} = \overrightarrow{e_b} \times \overrightarrow{e_c}$, $\overrightarrow{u_b} = \overrightarrow{e_c} \times \overrightarrow{e_a}$ et $\overrightarrow{u_c} = \overrightarrow{e_a} \times \overrightarrow{e_b}$.

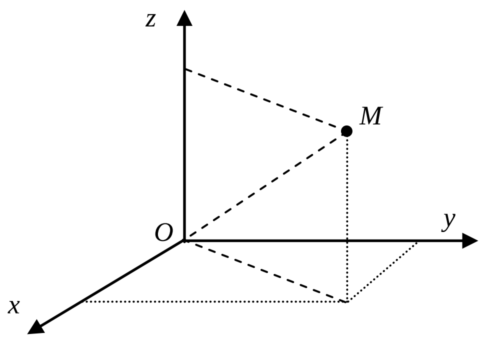
d) **En déduire** $\sin\theta_a$, $\sin\theta_b$ et $\sin\theta_c$. **Vérifier** ces résultats à l'aide de la question b).

e) **Montrer** que $\overrightarrow{u_a}$, $\overrightarrow{u_b}$, $\overrightarrow{u_c}$ peuvent constituer une base. Cette base est-elle normée?

Exercice 2 : Système de coordonnées (TP)

Cet exercice très important est d'avantage une question de cours déguisée qu'un véritable exercice. Il faut donc savoir le faire cours fermé !

O étant l'origine d'un repère cartésien $\mathscr{R}\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$, la position d'un point M de l'espace est définie par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.



La position de ce point M peut être caractérisée par différents triplets de nombres :

- le triplet cartésien : x, y, z
- le triplet cylindrique : ρ, φ, z

a) **Positionner** sur un schéma semblable à celui ci-dessus les vecteurs $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$, $\overrightarrow{e_\rho}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$.

b) **Rajouter** les 6 grandeurs x, y , z, r, ρ et φ. **Préciser** la dimension physique de chacune d'elles ainsi que leur domaine de variation respectif.

c) **Donner** les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en projection sur $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ d'une part, et en projection sur $\overrightarrow{e_\rho}$, $\overrightarrow{e_\varphi}$ et $\overrightarrow{e_z}$ d'autre part.

d) **Exprimer** ρ, φ et r en fonction de x, y et z.

e) On considère le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}r}$. **Donner** les composantes de ce vecteur dans le repère cartésien à l'aide des variables x, y et z et dans le repère cylindrique à l'aide des variables ρ, φ et z.

f) **En déduire** à l'aide des variables x, y et z d'une part et des variables ρ, φ et z d'autre part, les expressions du volume élémentaire $\mathrm{d}V$ et du travail élémentaire δW pour une force de type $\vec{F} = k\vec{r}$, où k est une constante.

Exercice 3 : Dérivation des vecteurs unitaires

Dans le repère cartésien $\mathscr{R}\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$, un point P se déplace dans le plan (xOy). Ses coordonnées polaires sont ρ et φ.

a) **Calculer** $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\rho}}{\mathrm{d}\varphi}\right]_{\mathscr{R}}$ et $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}\right]_{\mathscr{R}}$ en projection dans la base cartésienne $\mathscr{B}$ liée à $\mathscr{R}$.

b) **En déduire** les expressions de ces dérivés vectorielles dans la base cylindrique $\mathscr{B}_{cyl}$.

c) φ étant fonction du temps, **calculer** à l'aide de la question précédente les expressions de $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\rho}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}}$ et $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\varphi}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}}$ dans $\mathscr{B}_{cyl}$ en fonction de $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$.

d) **Montrer** qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{\Omega}$ tel que :

$$\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\rho}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}} = \overrightarrow{\Omega}\times\overrightarrow{e_\rho}, \qquad \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\varphi}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}} = \overrightarrow{\Omega}\times\overrightarrow{e_\varphi}, \qquad \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_z}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}} = \overrightarrow{\Omega}\times\overrightarrow{e_z}$$

En déterminer les composantes. Ce vecteur est le vecteur rotation d'un repère $\mathscr{R}'$ par rapport à $\mathscr{R}$: définir le repère $\mathscr{R}'$.

e) Pourquoi $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\rho}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_{cyl}} = \vec{0}$ et $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\varphi}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_{cyl}} = \vec{0}$?

f) **Calculer** $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_x}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_{cyl}}$ et $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_y}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_{cyl}}$ en projection sur $\mathscr{B}_{cyl}$, puis en projection sur $\mathscr{B}$.

Exercice 4 : Vecteur vitesse (TP)

Le point P est mobile par rapport au référentiel cartésien $\mathscr{R}\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$: ses coordonnées cartésiennes (x,y,z) et cylindriques (ρ,φ,z) sont fonction du temps.

a) **Exprimer** $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}}$, en projection dans $\mathscr{B}$ liée à $\mathscr{R}$ en fonction de *x, y* et *z*.

b) A partir de cette expression, **écrire** $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}}$ dans $\mathscr{B}_{cyl}$ en fonction de ρ, $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$, φ, $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ et *z*. Pour cela on **exprimera** *x, y* et *z* en fonction de ρ, φ et *z* puis $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ en fonction de $\overrightarrow{e_\rho}$, $\overrightarrow{e_\varphi}$ et $\overrightarrow{e_z}$.

c) **Retrouver** ce résultat directement à partir de l'expression de $\overrightarrow{OP}$ dans $\mathscr{B}_{cyl}$.

d) **Calculer** directement $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_{cyl}}$ dans $\mathscr{B}_{cyl}$.

Exercice 5 : Dérivation- suite (TP)

Soit le repère orthonormé cartésien $\mathscr{R}\left(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z\right)$ associé à la base $\mathscr{B}$, dans lequel la position d'un point M de l'espace est défini par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$. On définit alors le repère cylindrique $\mathscr{R}_{cyl}\left(O,\mathscr{B}_{cyl}\right)$ associé à la base orthonormée $\mathscr{R}_{cyl}=\left(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z\right)$.

a) **Exprimer** le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans $\mathscr{B}$.
b) **Exprimer** le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans $\mathscr{B}_{cyl}$.
c) **Calculer** la vitesse du point M par rapport au référentiel cartésien $\mathscr{R}$: $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}}$.

   Exprimer le résultat dans $\mathscr{B}$ et dans $\mathscr{B}_{cyl}$.
d) **Calculer** la vitesse du point M par rapport au référentiel cylindrique $\mathscr{R}_{cyl}$: $\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}_{cyl}}$. Exprimer le résultat dans $\mathscr{B}$ et dans $\mathscr{B}_{cyl}$.

Résultats : ils sont dans les exercices qui précèdent et dans le cours.

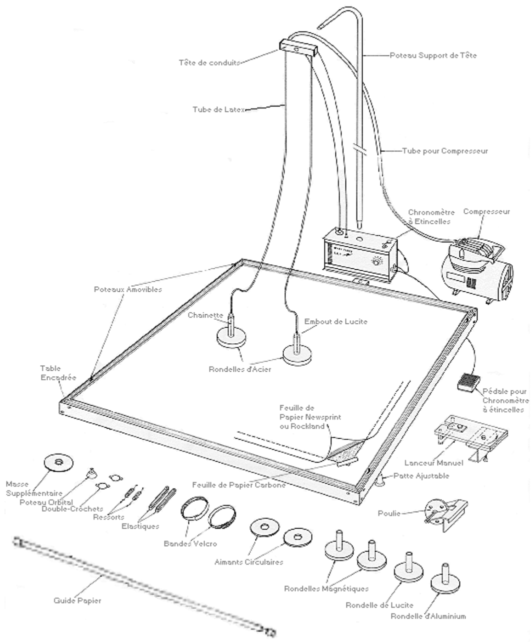
Thème 2 :
Cinématique du point

René Descartes (1596-1650)

Descartes définit ainsi le mouvement : "Mais si, au lieu de nous arrêter à ce qui n'a point d'autre fondement que l'usage ordinaire, nous désirons savoir ce que c'est que le mouvement selon la vérité, nous dirons [...] qu'il est le transport d'une partie de la matière, ou d'un corps, du voisinage de ceux qui le touchent immédiatement, et que nous considérons comme au repos, dans le voisinage de quelques autres."

Objectifs :

- Définir et identifier la nature d'un mouvement (uniforme, accéléré, retardé).
- Définir et identifier un mouvement circulaire, en spirale, hélicoïdal.
- Représenter les vecteurs vitesse et accélération en coordonnées polaires et calculer leurs modules.
- Etablir l'équation cartésienne d'une trajectoire. Représenter et interpréter la trajectoire.
- Connaître la relation entre vitesse linéaire et vitesse angulaire.



La table à coussin d'air permet de définir le vecteur vitesse en un point.

Questionnaire :

1. Un mouvement est uniforme si :
   - ○ Sa vitesse est constante.
   - ○ Son vecteur vitesse est constant.
   - ○ Son vecteur accélération est constant.
   - ○ Son accélération est nulle.
   - ○ Aucune réponse n’est correcte.

2. Un mouvement est décéléré si :
   - ○ La valeur algébrique de l'accélération tangentielle est constante.
   - ○ La valeur algébrique de l'accélération normale est constante.
   - ○ $\vec{a}\cdot\vec{v}<0$.
   - ○ $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires.
   - ○ Aucune réponse n’est correcte.

3. Le trièdre de Frénet est composé des trois vecteurs $\overrightarrow{e_n}$, $\overrightarrow{e_t}$ et $\overrightarrow{e_b}$, tels que
   - ○ $\left(\overrightarrow{e_n},\overrightarrow{e_t},\overrightarrow{e_b}\right)$ est une base orthonormée directe.
   - ○ $\left(\overrightarrow{e_b},\overrightarrow{e_n},\overrightarrow{e_t}\right)$ est une base orthonormée directe.
   - ○ $\left(\overrightarrow{e_t},\overrightarrow{e_n},\overrightarrow{e_b}\right)$ est une base orthonormée directe.
   - ○ $\left(\overrightarrow{e_t},\overrightarrow{e_b},\overrightarrow{e_n}\right)$ est une base orthonormée directe.
   - ○ Aucune réponse n’est correcte.

4. Le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_n}$ est :
   - ○ Constant.
   - ○ Dirigé vers la concavité.
   - ○ Dirigé vers l'extérieur de la trajectoire.
   - ○ Garde une direction fixe.
   - ○ Aucune réponse n’est correcte.

5. Concernant l'accélération d'entraînement :
   - ○ $\overrightarrow{a_e}\left(M,\mathscr{R}'/\mathscr{R}\right)=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_e}\left(M,\mathscr{R}'/\mathscr{R}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}}$
   - ○ $\overrightarrow{a_e}\left(M,\mathscr{R}'/\mathscr{R}\right)=\left[\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_e}\left(M,\mathscr{R}'/\mathscr{R}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathscr{R}'}$
   - ○ $\overrightarrow{a_e}\left(M,\mathscr{R}'/\mathscr{R}\right)=2\overrightarrow{\Omega}\times\overrightarrow{v_e}\left(M,\mathscr{R}'/\mathscr{R}\right)$
   - ○ $\overrightarrow{a_e}\left(M,\mathscr{R}'/\mathscr{R}\right)=2\overrightarrow{\Omega}\times\vec{v}\left(M/\mathscr{R}'\right)$
   - ○ Aucune réponse n’est correcte.

Exercices :

Exercice 1 : Etude d'une trajectoire en coordonnées cartésiennes

Dans le plan (xOy) d'un repère $\mathscr{R}\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$, un point P possède à l'instant t les coordonnées : $x = ct^2$ et $y = bt$, où c et b sont des constantes positives.

a) **Former** l'équation cartésienne du support de la trajectoire et le représenter.

b) 1- **Calculer** les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{P/\mathscr{R}}}$.

2- **Calculer** les composantes du vecteur accélération $\overrightarrow{a_{P/\mathscr{R}}}$. Que peut-on dire de $\overrightarrow{a_{P/\mathscr{R}}}$?

3- Sur la figure de la question a), **rajouter** les vecteurs $\overrightarrow{v_{P/\mathscr{R}}}$ et $\overrightarrow{a_{P/\mathscr{R}}}$.

c) 1- **Calculer** $\left\|\overrightarrow{v_{P/\mathscr{R}}}\right\|$. Le mouvement est-il accéléré, retardé ou uniforme ?

2- **Déterminer** la composante tangentielle a_t de $\overrightarrow{a_{P/\mathscr{R}}}$.

3- **En déduire** la composante normale a_n de $\overrightarrow{a_{P/\mathscr{R}}}$.

d) 1- **Calculer** $\cos\alpha$, sachant que $\alpha = \left(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{v_{P/\mathscr{R}}}\right)$.

2- A l'aide de $\left\|\overrightarrow{a_{P/\mathscr{R}}}\right\|$ et de α, **retrouver** la composante normale a_n.

Exercice 2 : Mouvement plan circulaire uniforme

Dans le repère $\mathscr{R}\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y}\right)$, un point P a pour coordonnées polaires ρ et φ à l'instant t, tels que : $\rho = A\cos\varphi + B\sin\varphi$ avec $\varphi = \omega t$, où A, B, et ω sont des constantes positives.

a) **Déterminer** les composantes cylindriques du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{P/\mathscr{R}}}$ en fonction du temps. **En déduire** la nature du mouvement.

b) Quelles sont les composantes cylindriques du vecteur accélération $\overrightarrow{a_{P/\mathscr{R}}}$ en fonction du temps ?

c) **Déterminer** l'équation cartésienne de la trajectoire. **Montrer** que celle-ci est un cercle.

d) **Déduire** de l'expression de $\left\|\overrightarrow{a_{P/\mathscr{R}}}\right\|$ le rayon du cercle.

Exercice 3 : Mouvement circulaire uniforme (TP)

Dans le repère $\mathscr{R}\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$, un point P a pour coordonnées polaires ρ et φ, telles que

$$\rho = 2A\cos\frac{\omega t}{2} \text{ avec } \varphi = \frac{\omega t}{2}\text{, où } A \text{ et } \omega \text{ sont des constantes positives, et } \varphi \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

a) **Ecrire** les équations polaires et cartésiennes de la trajectoire. Tracer celle-ci.

b) **Calculer** dans la base cylindrique $\mathscr{R}_{cyl} = \left(\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi},\overrightarrow{e_z}\right)$, les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{P/\mathscr{R}}}$ et du vecteur accélération $\overrightarrow{a_{P/\mathscr{R}}}$ en fonction de φ et ω.

c) **Indiquer** la nature du mouvement.

d) Soit le point $I\left(A,0,0\right)_{\mathscr{R}_{ca}}$. **Calculer** les composantes de $\overrightarrow{IP}$ en fonction du temps. **En déduire** la relation qui lie $\overrightarrow{a_{P/\mathscr{R}}}$ et $\overrightarrow{IP}$. **Commenter** ce résultat.

Eléments de réponse :

a) $\rho = 2A\cos\varphi$; $\left(x-A\right)^2 + y^2 = A^2$

b) $\overrightarrow{v_{P/\mathscr{R}}} = A\omega\left(-\sin\varphi\overrightarrow{e_\rho} + \cos\varphi\overrightarrow{e_\varphi}\right)$; $\overrightarrow{a_{P/\mathscr{R}}} = -A\omega^2\left(\cos\varphi\overrightarrow{e_\rho} + \sin\varphi\overrightarrow{e_\varphi}\right)$

c) *mouvement circulaire uniforme*

d) $\overrightarrow{IP} = A\left(\cos\varphi\overrightarrow{e_\rho} + \sin\varphi\overrightarrow{e_\varphi}\right)$*; l'accélération est normale et centripète comme dans tout mouvement circulaire uniforme*

Exercice 4 : Mouvement en spirale (TP)

Dans le plan $\left(xOy\right)$ d'un repère $\mathscr{R}\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$, le mouvement d'un point P est décrit par la variation de ses coordonnées cartésiennes en fonction du temps t :

$$x = b\mathrm{e}^{-kt}\cos kt \;;\; y = b\mathrm{e}^{-kt}\sin kt\text{, où } b \text{ et } k \text{ sont deux constantes positives.}$$

a) 1- **Déterminer** en fonction de t les coordonnées polaires ρ et φ de P.
2- **En déduire** l'équation polaire de la trajectoire de P.
3- **Représenter** la trajectoire.

b) 1- **Déterminer** en fonction de t les composantes polaires du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{P/\mathscr{R}}}$.
2- **En déduire** l'angle $\alpha = \left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{v_{P/\mathscr{R}}}\right)$.
3- **Indiquer** la nature du mouvement (uniforme, accéléré ou retardé).

c) 1- **Déterminer** en fonction de t les composantes polaires du vecteur accélération $\overrightarrow{a_{P/\mathscr{R}}}$.
2- **Préciser** la direction de $\overrightarrow{a_{P/\mathscr{R}}}$ et représenter ce vecteur sur la figure.

d) 1- **Déterminer** en fonction de t les composantes tangentielle et normale de $\overrightarrow{a_{P/\mathscr{R}}}$.
2- **En déduire** la valeur du rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice 5 : Fusée Balistique (ENSI DEUG 2010)

Une fusée balistique, assimilée à un point matériel *M* pesant, est mise à feu à l'instant $t = 0$, depuis le point *O* avec une vitesse $\vec{V_o}$ faisant un angle α avec le plan horizontal $\left(O, \vec{x}, \vec{y}\right)$. La fusée se déplace uniquement dans le plan vertical $\left(O, \vec{x}, \vec{z}\right)$

Le référentiel $\Re$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $\left(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right)$.

On note $\vec{g} = -g\vec{z}$ l'accélération de la pesanteur.

1 Appliquer le principe fondamental de la dynamique au point *M*. En déduire la relation vectorielle liant l'accélération $\vec{a}$ du point *M* et l'accélération $\vec{g}$ de la pesanteur.

2 Déterminer les équations paramétrées de la trajectoire du point *M* en fonction de V_o, α, g et *t*.

3 En déduire l'équation de la trajectoire du point *M* sous la forme $z = f(x)$ en fonction de V_o, α et g.

4 En déduire la portée *P* et l'altitude maximale $h_{\max}$ atteinte par la fusée en fonction de V_o, α et g.

5 Pour quelle valeur de α la portée *P* est-elle maximale ? Exprimer la portée maximale $P_{\max}$

$_{\max}P$ en fonction de V_o et g.

On désire maintenant intercepter la fusée pendant le vol. Pour cela, on lâche sans vitesse initiale, à l'instant t_1 positif, un obus au point N_0 de coordonnées (x_0, z_0). Cet obus sera assimilé à un point matériel *N* pesant.

6 Déterminer les équations paramétrées de la trajectoire de l'obus en fonction de x_0, z_0, g, t_1 et t.

7 En déduire à quel instant *T* s'effectue l'interception.

8 En déduire une équation du second degré en t_1 résultant de l'intersection des 2 trajectoires.

9 À quelle condition existe-t-il une solution à cette équation ? Où doit se situer le point N_0 d'après cette condition ?

10 Déterminer à quel instant t_1 l'obus doit être lâché afin de réussir l'interception en fonction de x_0, z_0, g, V_o et α.

Exercice 6 : Mouvement en hélice (ENSI DEUG 2010)

Le référentiel $\Re$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $\left(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$.

Un point matériel *M* se déplace sur une courbe définie par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = 2A\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\alpha t \\ y = 2A\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\alpha t \\ z = A\mathrm{e}^{\alpha t} \end{cases}$$

où *A* et α sont des constantes, et *x*, *y*, *z* sont les coordonnées cartésiennes du point *M* à l'instant *t* .

On désigne par $\left(M,\vec{\tau},\vec{n},\vec{b}\right)$ le repère de Frenet, $\vec{\tau}$ étant le vecteur unitaire tangent en *M* à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement, $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal en *M* à $\vec{\tau}$ dirigé vers le centre de courbure et $\vec{b}$ complète le repère afin qu'il soit orthonormé direct.

On note *s* l'abscisse curviligne du point *M* et *R* le rayon de courbure de la trajectoire au point *M*.

1 Exprimer dans $\Re$ la vitesse $\vec{V}$ du point *M* ainsi que sa norme en fonction de *A*, α et *t*.

2 En déduire l'expression de $\vec{\tau}$ dans le repère $\left(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$.

3 Montrer que la vitesse $\vec{V}$ du point *M* fait un angle θ constant avec l'axe $O\vec{z}$.

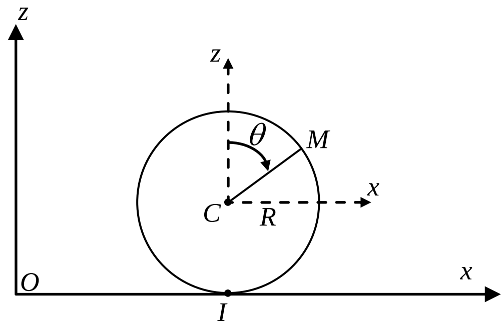
4 Exprimer dans $\Re$ l'accélération $\vec{a}$ du point *M* ainsi que sa norme en fonction de *A*, α et *t*.

5 Déterminer la norme a_t de l'accélération tangentielle du point *M* en fonction de *A*, α et *t*.

6 En déduire la norme a_n de l'accélération normale du point *M* en fonction de *A*, α et *t*.

7 En déduire le rayon de courbure *R* de la trajectoire au point *M* en fonction de *A*, α et *t*. Montrer que *R* est proportionnel à la coordonnée *z* du point *M*.

Exercice 7 : Mouvement cycloïdal



Une roue $(\mathscr{C})$, assimilée à un cercle de centre C et de rayon R, roule sans glisser sur l'axe Ox du référentiel galiléen $\mathscr{R}\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$. Le système reste, au cours de son mouvement, dans le plan xOz, où $\overrightarrow{e_z}$ représente la verticale ascendante. On note I le point de contact de $(\mathscr{C})$ avec Ox. La roue est animée d'une vitesse de rotation uniforme autour de son axe de révolution, de sorte que la vitesse de C dans $\mathscr{R}$ est constante : $\vec{v}(C/\mathscr{R}) = v_o\overrightarrow{e_x}$.

On considère le point M de $(\mathscr{C})$, qui, à l'instant initial $t=0$, a pour coordonnées dans $\mathscr{R}$, $(0,0,2R)$. A un instant $t>0$, la position de M est repérée par l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{e_z},\overrightarrow{CM}\right)$.

Soit $\mathscr{R}^*$, le référentiel barycentrique de la roue : son origine est C, et ses axes sont colinéaires à ceux de $\mathscr{R}$: $\mathscr{R}^*\left(C,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$.

a) **Montrer**, par un raisonnement simple, que le roulement sans glissement se traduit par la relation $v_o = R\dot{\theta}$.

b) **Exprimer** le vecteur position de M dans $\mathscr{R}^*$, puis dans $\mathscr{R}$. En déduire la trajectoire de M dans $\mathscr{R}^*$, puis dans $\mathscr{R}$.

c) **Déterminer** la vitesse et l'accélération de M dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}^*$.

d) **Déterminer** la vitesse et l'accélération de M dans son mouvement par rapport à $\mathscr{R}$. Calculer la norme de ces vecteurs et étudier leurs variations.

e) **Exprimer** la vitesse et l'accélération de M dans $\mathscr{R}$ dans la base de Frénet. En déduire le rayon de sa trajectoire.

Exercice 8 : Mouvement hélicoïdal (TP)

Un point matériel M décrit, par rapport à un repère $\mathscr{R}\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$, une trajectoire définie par les équations paramétriques :

$$x = b\sin\omega t,\ \ y = b(1-\cos\omega t)\ \text{ et }\ z = \omega t,\ \text{où } b \text{ et } \omega \text{ constantes positives.}$$

a) **Donner** les coordonnées polaires ρ et φ de H, projeté orthogonal de M dans (xOy).

b) Quels sont la trajectoire et le mouvement, par rapport à $\mathscr{R}$, de H ?

c) **Donner** les composantes cartésiennes, cylindriques et intrinsèques des vecteurs vitesse et accélération du point M par rapport à $\mathscr{R}$.

Eléments de réponse :

a) $\rho = 2b\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|$ *et* $\varphi = \frac{\omega t}{2}$

b) *mouvement circulaire uniforme ($v=\omega b$) de centre (O, b)*

c) *1-* $\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}} = b\omega\cos\omega t\,\vec{e_x} + b\omega\sin\omega t\,\vec{e_y} + b\omega\vec{e_z}$; $\overrightarrow{a_{M/\mathscr{R}}} = -b\omega^2\sin\omega t\,\vec{e_x} + b\omega^2\cos\omega t\,\vec{e_y}$

2- $\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}} = b\omega\cos\frac{\omega t}{2}\vec{e_\rho} + b\omega\sin\frac{\omega t}{2}\vec{e_\varphi} + b\omega\vec{e_z}$; $\overrightarrow{a_{M/\mathscr{R}}} = -b\omega^2\sin\frac{\omega t}{2}\vec{e_\rho} + b\omega^2\cos\frac{\omega t}{2}\vec{e_\varphi}$

3- $\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}} = \sqrt{2}\left(b\omega\right)\vec{e_t}$; $\overrightarrow{a_{M/\mathscr{R}}} = b\omega^2\vec{e_n}$

Exercice 9 : Manège du "service à thé"

Sur le plateau $(\mathscr{P})$ d'un manège (plateforme circulaire de centre O et de rayon R), on a installé un disque $(\mathscr{D})$, de centre C et de rayon $r < R$, sur la circonférence duquel est fixé un siège, repéré par le point M.

Le plateau $(\mathscr{P})$ du manège tourne avec une vitesse angulaire constante Ω autour de son axe vertical ascendant Oz, par rapport à son bâti, auquel est associé le référentiel galiléen $\mathscr{R}\left(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$.

Le disque $(\mathscr{D})$ a, par rapport au plateau $(\mathscr{P})$, un mouvement de rotation uniforme, de vitesse ω autour de l'axe de révolution Cz.

On définit les référentiels $\mathscr{R}_{\mathscr{P}}\left(O,\vec{e_{x'}},\vec{e_{y'}},\vec{e_z}\right)$ lié à $(\mathscr{P})$, et $\mathscr{R}_{\mathscr{D}}\left(C,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_z}\right)$ lié au siège M de $(\mathscr{D})$, avec $\left(\vec{e_x},\vec{e_{x'}}\right) = \Omega\, t$ et $\left(\vec{e_{x'}},\vec{e_1}\right) = \omega\, t$.

On pose $\overrightarrow{OC} = L\,\overrightarrow{e'_x}$ ($L < R$ constant) et $\overrightarrow{CM} = r\,\vec{e_1}$.

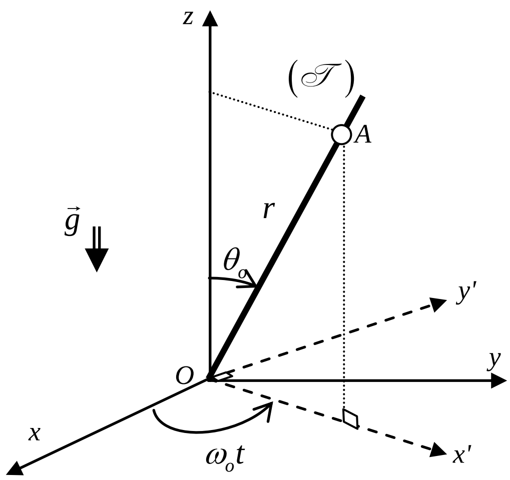
a) **Définir** les vecteurs rotation $\vec{\Omega}\left(\mathscr{R}_{\mathscr{P}}/\mathscr{R}\right)$, $\vec{\Omega}\left(\mathscr{R}_{\mathscr{D}}/\mathscr{R}_{\mathscr{P}}\right)$ et $\vec{\Omega}\left(\mathscr{R}_{\mathscr{D}}/\mathscr{R}\right)$.

b) **Calculer** indépendamment les unes des autres, les vitesses $\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_{\mathscr{P}}\right)$, $\vec{V_e}\left(M,\mathscr{R}_{\mathscr{P}}/\mathscr{R}\right)$ et $\vec{V}\left(M/\mathscr{R}\right)$. **Vérifier** la loi de composition des vitesses.

c) **Calculer** indépendamment les unes des autres, les accélérations $\vec{a}\left(M/\mathscr{R}_{\mathscr{P}}\right)$, $\vec{a_e}\left(M,\mathscr{R}_{\mathscr{P}}/\mathscr{R}\right)$, $\vec{a_c}\left(M,\mathscr{R}_{\mathscr{P}}/\mathscr{R}\right)$ et $\vec{a}\left(M/\mathscr{R}\right)$. **Vérifier** la loi de composition des accélérations.

Exercice 10 : Mouvement d'une masselotte sur une tige

Une masselotte A, de masse m, peut coulisser sans frottements, sur une tige $(\mathscr{T})$. On note r la distance OA entre l'extrémité de la tige et la masselotte A considérée comme ponctuelle.
Cette tige, inclinée de l'angle θ_o par rapport à l'axe Oz du repère d'observation $\mathscr{R}(O,xyz)$, tourne uniformément à la vitesse angulaire ω_o autour de Oz.
On note $\mathscr{R}'(O,x'y'z')$ le repère orthonormé direct lié à la tige, et indiqué sur la figure ci-contre.



a) **Exprimer** le vecteur $\overrightarrow{OA}$ en fonction de r et θ_o, dans la base $\mathscr{B}'$ liée à $\mathscr{R}'$. En déduire l'expression de la vitesse de A dans $\mathscr{R}'$ $\overrightarrow{v_{A/\mathscr{R}'}}$ et de l'accélération de A dans $\mathscr{R}'$ $\overrightarrow{a_{A/\mathscr{R}'}}$, que l'on exprimera dans $\mathscr{B}'$.

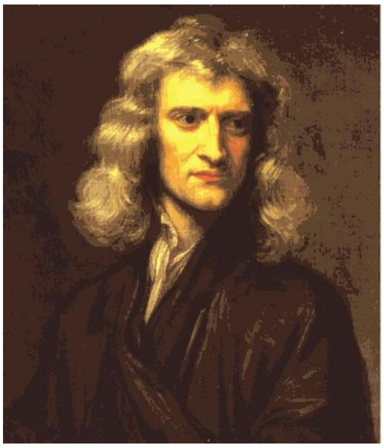
b) **Caractériser** le mouvement de $\mathscr{R}'$ par rapport à $\mathscr{R}$ (vitesse de l'origine, vecteur rotation).

c) **Déterminer** l'expression de la vitesse d'entraînement, de l'accélération d'entraînement et de l'accélération de Coriolis, liées à A, dans le mouvement de $\mathscr{R}'$ par rapport à $\mathscr{R}$.

d) **Retrouver**, par application des lois de composition des mouvements, les expressions de la vitesse et de l'accélération de A dans $\mathscr{R}$.

Thème 3 :

Dynamique du point



Isaac Newton (1642 - 1727)

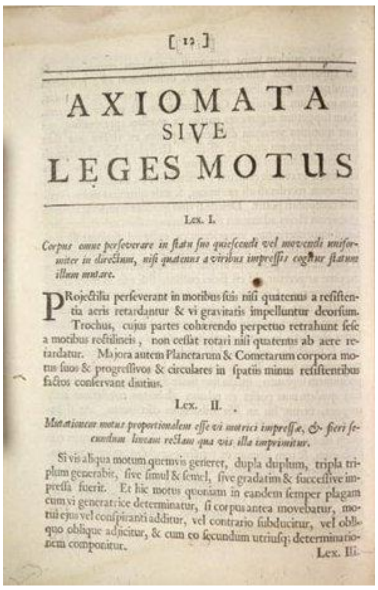
En 1687, Newton met en évidence que des forces universelles régissent les mouvements de toute masse dans l'univers. Il énonce la théorie de la gravité dans son ouvrage intitulé "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica". Il donne ainsi naissance à la "mécanique newtonienne" dite aussi "mécanique classique".

Pré-requis :

- Savoir résoudre les équations différentielles du 1er et 2ème ordre (1er semestre).

Objectifs :

- Différencier repère galiléens et non galiléens.
- Enoncer et appliquer le principe de l'inertie (1ère loi de Newton).
- Identifier et définir les différentes forces s'appliquant sur un objet ou particule (poids, force de rappel, force de frottements visqueux, force électrostatique, force de Lorentz, forces d'inertie).
- Enoncer et appliquer la loi fondamentale de la dynamique (2ème loi de Newton).
- Enoncer et appliquer le théorème du moment cinétique.
- Enoncer et appliquer le principe de l'action et de la réaction (3ème loi de Newton).



[12]

AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Projectilia perseverant in motibus suis nisi quatenus a resistentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohaerendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari nisi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur, si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel oblique adjicitur, & cum eo secundum utriusq; determinationem componitur.

Lex. III.

Les deux premières lois de Newton en latin dans l'édition originale du Principia Mathematica de 1687.

Questionnaire :

1. Un référentiel est galiléen s'il est en translation rectiligne uniforme par rapport :
   - ○ Au référentiel de Copernic.
   - ○ Au référentiel de Képler.
   - ○ Au référentiel géocentrique.
   - ○ Au référentiel terrestre.
   - ○ Aucune réponse n’est correcte.

2. Les forces suivantes sont des forces dites "fondamentales" :
   - ○ La force de gravitation.
   - ○ La force électromagnétique.
   - ○ La force élastique.
   - ○ La force de pesanteur.
   - ○ Aucune réponse n’est correcte.

3. Soit deux référentiels $\mathscr{R}$ galiléen et $\mathscr{R}'$ non galiléen. La loi fondamentale de la dynamique appliquée à une particule ponctuelle de masse *m*, s'énonce :
   - ○ $\sum \vec{F}\left(M/\mathscr{R}\right) = m\vec{a}\left(M/\mathscr{R}\right)$
   - ○ $\sum \vec{F}\left(M/\mathscr{R}'\right) = m\vec{a}\left(M/\mathscr{R}'\right)$
   - ○ $\sum \vec{F}\left(M/\mathscr{R}\right) = m\vec{a}\left(M/\mathscr{R}'\right) + m\vec{a_e}\left(M,\mathscr{R}/\mathscr{R}'\right) + m\vec{a_c}\left(M,\mathscr{R}/\mathscr{R}'\right)$
   - ○ $\sum \vec{F}\left(M/\mathscr{R}'\right) = m\vec{a}\left(M/\mathscr{R}'\right) + m\vec{a_e}\left(M,\mathscr{R}/\mathscr{R}'\right) + m\vec{a_c}\left(M,\mathscr{R}/\mathscr{R}'\right)$
   - ○ Aucune réponse n’est correcte.

4. Le théorème, en un point fixe *A*, du moment cinétique s'écrit :
   - ○ $\vec{L_A}\left(M/\mathscr{R}\right) = m\overrightarrow{AM} \times \vec{v}\left(M/\mathscr{R}\right)$
   - ○ $\vec{M_A}\left(M/\mathscr{R}\right) = \overrightarrow{AM} \times \sum \vec{F}\left(M/\mathscr{R}\right)$
   - ○ $\left[\dfrac{\mathrm{d}\vec{L_A}}{\mathrm{d}t}\left(M/\mathscr{R}\right)\right]_{\mathscr{R}} = \overrightarrow{AM} \times \sum \vec{F}\left(M/\mathscr{R}\right)$
   - ○ $\left[\dfrac{\mathrm{d}\vec{L_A}}{\mathrm{d}t}\left(M/\mathscr{R}\right)\right]_{\mathscr{R}} = \vec{M_A}\left(\sum \vec{F}\left(M/\mathscr{R}\right)\right)$
   - ○ Aucune réponse n’est correcte

5. La troisième loi de Newton :
   - ○ Est valable dans tout référentiel, galiléen ou non.
   - ○ Précise que $F_{1\to 2} = F_{2\to 1}$
   - ○ Stipule que la force de réaction est directement opposée à l'action.
   - ○ S'applique pour toute force, comme par exemple la force de gravitation.
   - ○ Aucune réponse n’est correcte

Exercices :

Exercice 1 : Mouvement rectiligne (TP)

Un point *A*, de masse *m* et repéré par sa coordonnée *x*, est astreint à se déplacer sur l'axe *Ox* d'un référentiel galiléen $\mathscr{R}(O, xyz)$. Il est soumis, dans la direction (Ox), à la force $\vec{F} = -\lambda m \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e_x}$, où λ est une constante positive. A l'instant $t = 0$, *A* se trouve en *O* et possède le vecteur vitesse $\vec{v_o} = v_o\vec{e_x}$ avec $v_o > 0$.

a) **Déterminer** l'équation horaire $x(t)$ du mouvement.

b) **Tracer** le graphe de $x(t)$ et décrire le mouvement.

Réponse : $x(t) = \frac{v_o}{\lambda}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}) \rightarrow$ *existence de* $x_{\lim} = \frac{v_o}{\lambda}$ *(cf. texte 2 du 1er semestre).*

Exercice 2 : Mouvement sous l'action de la pesanteur

Dans un référentiel terrestre $\mathscr{R}\left(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\right)$ supposé galiléen, où *Oz* est la verticale ascendante et (xOy) le sol, on étudie le mouvement d'un point *A*, de masse *m* et de coordonnées (x, y, z), sous la seule action de son poids. A l'instant $t = 0$, *A* se trouve en *O* et possède le vecteur vitesse $\vec{v_o} = (v_o\cos\alpha)\vec{e_y} + (v_o\sin\alpha)\vec{e_z}$ avec $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Préliminaires à faire en autoévaluation :

a) **Déterminer** les expressions de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$. Montrer que la trajectoire est plane.

b) On se place dans le cas général où $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

1- **Former** l'équation cartésienne de la trajectoire et identifier celle-ci.

2- **Représenter** le graphe de la trajectoire. Indiquer l'altitude maximale.

3- **Déterminer** la distance y_C qui sépare *O* du point d'impact *C* de *A* sur le sol (y_C est la portée). **Indiquer** pour quelle valeur de α la portée est maximale.

Eléments de réponse :

a) $x(t) = 0$; $y(t) = (v_o\cos\alpha)t$; $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_o\sin\alpha)t$ $\rightarrow$ *mvt plan (plan (yOz))*

b) *1- du type* $z = ay^2 + by + c$ $\rightarrow$ *parabole*

2- $z_{\max} = \frac{1}{2g}\left(\sin^2\alpha\right)v_o^2$

3- $y_c = \frac{2v_o^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$ $\rightarrow$ y_c *max pour* $\alpha = \frac{\pi}{4}$

c) Toujours avec α quelconque, le point A est soumis à une force supplémentaire de frottement $\vec{F} = -k\overrightarrow{v_{A/\mathscr{R}}}$, où k est une constante positive et $\overrightarrow{v_{A/\mathscr{R}}}$ le vecteur vitesse de A dans $\mathscr{R}$.

1- i) **Etablir** les équations différentielles auxquelles obéissent les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{A/\mathscr{R}}}$.

ii) **Déterminer** alors ses composantes et montrer qu'il existe une vitesse limite dont on déterminera les caractéristiques.

2- i) **Déterminer** les expressions de $y(t)$ et de $z(t)$.

ii) En admettant que $z(t)$ peut prendre des valeurs négatives, **montrer** que la trajectoire admet une asymptote que l'on déterminera.

iii) A quel instant l'altitude est-elle maximale?

iv) Quelle est alors l'abscisse du sommet de la trajectoire ? Comparer ce résultat avec la valeur obtenue en b)2- en faisant tendre k vers 0.

Exercice 3 : Centrifugeuse (Principe de l'essoreuse à salade)

Soit un point matériel M (m = 10 g) pouvant se déplacer sans frottement dans un tube horizontal de longueur d = 40 cm. Le tube tourne à vitesse constante autour d'un axe vertical passant par une de ses extrémités. M est attaché par un fil de longueur l = 20 cm à l'axe de rotation.

a) 1) **Réaliser** un schéma du dispositif.

2) **Définir** le référentiel galiléen $\mathscr{R}$ de référence, et le choix du repère associé.

3) **Définir** le référentiel d'étude $\mathscr{R}'$ le plus judicieux associé au système et **définir** son mouvement par rapport au référentiel galiléen $\mathscr{R}$ de référence.

b) **Réaliser** le bilan des forces exercées sur M dans le référentiel $\mathscr{R}$, puis dans le référentiel $\mathscr{R}'$. En **déduire** la base de projection $\mathscr{B}_{syst}$ la plus appropriée pour réaliser l'étude du système.

c) **Donner**, dans la base $\mathscr{B}_{syst}$, l'expression de chacune des forces s'exerçant sur M.

d) **Etudier** l'équilibre de M par rapport au tube. Quel est son mouvement par rapport au sol ?

e) Le fil casse.

1) Quelle est la vitesse du point matériel à la sortie du tube, par rapport au tube, puis par rapport au sol ?

2) Quelle est la force exercée par le tube sur M en fonction du temps ?

3) Quel est le type de trajectoire par rapport au sol, après la sortie du tube ?

Exercice 4 : Glissement d'une bille sur un cylindre

Sur un cylindre fixe, de centre *O* et de rayon *R*, une bille *M*, assimilable à une masse ponctuelle *m*, est lâchée, sans vitesse initiale, du point *A*, situé sur la verticale ascendante *Oz* du référentiel galiléen $\mathscr{R}\left(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$. Le mouvement de *M* s'effectue, sans frottement, dans le plan perpendiculaire à l'axe *Oy* de révolution du cylindre.

On repère la position de *M* par l'angle $\theta=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)$.

a) **Réaliser** le bilan des forces s'exerçant sur *M*. Quel est le repère d'étude le plus adapté ? Quelle est la base de projection la plus judicieuse ?

b) **Appliquer** le théorème du moment cinétique en *O*, et en **déduire** une intégrale première du mouvement.

c) **Déduire** du principe fondamental de la dynamique l'expression de la réaction exercée par le cylindre sur la bille, en fonction de θ et de sa dérivée par rapport au temps $\dot{\theta}$, puis uniquement en fonction de θ.

d) Pour quelle valeur de θ la bille quitte-t-elle son support ?

Exercice 5 : Mouvement d'une bille sur une demi-sphère

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen $\mathscr{R}_T\left(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$, un corps ponctuel *M*, de masse *m*, glisse sans frottement sur une demie-sphère de rayon *r*.
A l'instant initial $t=0$, *M* est au sommet M_o de la demie-sphère, et on lui communique une vitesse angulaire initiale $\dot{\varphi}_o$.
On note $\vec{g}=-g\vec{e_z}$ l'accélération de la pesanteur, et *M* est repéré par l'angle $\varphi=\left(\vec{e_z},\overrightarrow{OM}\right)$.

a) **Décrire** qualitativement le mouvement de *M*.

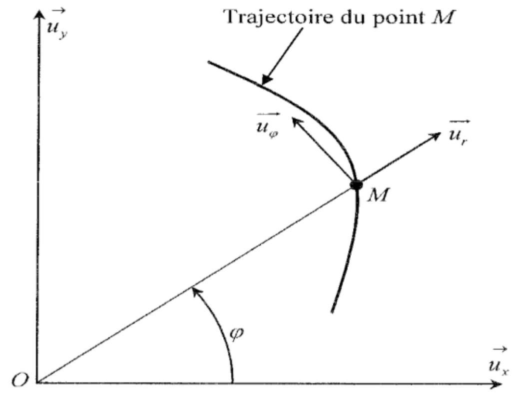
b) Que peut-on dire du travail de la réaction $\vec{R}$ de la demie-sphère sur *M* ?

c) 1) **Déterminer** l'expression de l'énergie mécanique de *M*. On prendra l'origine des énergies potentielles pour *M* dans le plan horizontal.
2) En **déduire** l'expression générale de $\dot{\varphi}$ en fonction de *g*, *r*, $\dot{\varphi}_o$ et φ. A priori, *M* peut-il décrire la totalité de la demie-sphère ?

d) **Déterminer**, à partir du principe fondamental de la dynamique, l'expression de $\vec{R}$.

e) Lorsque $\dot{\varphi}_o$ est quasiment nulle, montrer qu'il existe une valeur de φ pour laquelle la réaction n'annule. Quel est alors le mouvement de *M* ?

Exercice 6 : Mouvement à accélération centrale (ENSI DEUG 2009)



Un point M, de masse m, décrit dans le référentiel $\Re_o$ rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\right)$, une trajectoire située dans le plan $\overrightarrow{u_x} O \overrightarrow{u_y}$ de façon à ce que son accélération passe toujours par un point fixe O (mouvement à accélération centrale).

La position du point M est définie par $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$ et l'angle φ entre $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_r}$.

On note $\vec{V}$ la vitesse du point M et $\vec{a}$ son accélération.

1 Définir le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_o}$ du point M par rapport au point O.

2 Déterminer l'expression de $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_o}}{\mathrm{d}t}$. Que peut-on en conclure dans le cas des mouvements à accélération centrale ?

3 Déterminer dans $\Re_o$ la vitesse $\vec{V}$ du point M en fonction des coordonnées polaires (r, φ).

4 Donner l'expression du moment cinétique σ_o en fonction de m, r et de $\dot{\varphi}$.

5 Déterminer dans $\Re_o$ l'accélération $\vec{a}$ du point M en fonction des coordonnées polaires (r, φ).

6 En déduire la loi des aires.

7 Exprimer, en fonction de σ_o, la surface élémentaire dS balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ pendant l'intervalle de temps dt.

On admet maintenant que la trajectoire de M est un cercle de centre O et de rayon R.

8 Déterminer les composantes de $\vec{a}$ dans la base polaire $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\varphi}\right)$.

9 En déduire les expressions de $\dot{\varphi}$ et du moment cinétique σ_o.

10 Que devient l'expression de la vitesse $\vec{V}$ du point M pour ce mouvement ?

11 En déduire la nature du mouvement de M.

12 Déterminer le temps T nécessaire au point M pour décrire le cercle de centre O et de rayon R en fonction de $\dot{\varphi}$.

Exercice 7 : Influence de la force de Coriolis sur une particule en chute libre

Soit le référentiel terrestre local représenté par le repère $\mathscr{R}_T\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$, où $\overrightarrow{e_x}$ est orienté vers l'est, $\overrightarrow{e_y}$ est orienté vers le nord, et $\overrightarrow{e_z}$ désigne la verticale ascendante. Ce repère est en rotation par rapport au référentiel géocentrique à la vitesse angulaire Ω_T, et on note $\vec{g} \approx -g\overrightarrow{e_z}$ la pesanteur terrestre en O (on négligera le faible écart à la verticalité de $\vec{g}$ associé à la force d'inertie d'entraînement de la rotation de la Terre sur elle-même), et R_T le rayon terrestre.

Une bille est lâchée sans vitesse initiale depuis une hauteur $h << R_T$ sur l'axe Oz.

a) **Réaliser** un schéma de la Terre, avec le référentiel géocentrique $\mathscr{R}_o$, le référentiel terrestre local $\mathscr{R}_T$, le vecteur rotation de la Terre $\overrightarrow{\Omega_T}$, le vecteur champ de pesanteur terrestre, et la latitude λ de O.

b) Approche qualitative.

1) **Faire** un schéma de la situation initiale et du début du mouvement dans le plan xOz, sur lequel on représentera les forces en présence à $t=0$ et à l'instant infiniment voisin $\mathrm{d}t$.

2) Pourquoi la trajectoire de chute libre d'un point matériel n'est pas verticale ?

3) Dans quel sens a lieu la déviation principale ? On pourra **s'appuyer** sur le schéma et sur l'importance relative des différentes forces pour déterminer le sens de la déviation.

c) Approche quantitative.

1) **Ecrire** le système d'équations différentielles du mouvement.

2) **Justifier** que $v_x << \dfrac{g}{\Omega_T}$, de sorte que l'on peut négliger le terme en $\dot{x}$ dans l'équation suivant $\overrightarrow{e_z}$.

3) **(TP) : Résoudre** alors le système différentiel, pour déterminer $z(t)$, puis $x(t)$ et enfin $y(t)$.

d) Vérification expérimentale : la première expérience de vérification de la déviation vers l'est a été tentée sans succès par Cassini dans le puits de l'observatoire de Paris. Elle a été réussie en 1831 par Reich dans un puits de mine de Freiburg. En 1903, Flammarion a refait l'expérience avec des billes d'acier lâchées à vitesse nulle du haut du Panthéon (hauteur h = 67 m, latitude $\lambda(\text{Paris}) = 48°51'$). Il a mesuré une déviation de 7,6 mm.

1) Quelle est la durée de la chute ?

2) Quelle valeur aurait-il dû trouver pour la déviation ? On **vérifiera** que la déviation vers le nord est bien négligeable devant la déviation vers l'est.

3) Quel phénomène physique négligé est susceptible de justifier l'écart observé, et pourquoi ?

Exercice 8 : Influence de la force de Coriolis sur un mouvement dans un plan horizontal

Soit le référentiel terrestre local représenté par le repère $\mathscr{R}_T\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$, où $\overrightarrow{e_x}$ est orienté vers l'est, $\overrightarrow{e_y}$ est orienté vers le nord, et $\overrightarrow{e_z}$ désigne la verticale ascendante. Ce repère est en rotation par rapport au référentiel géocentrique à la vitesse angulaire Ω_T, et on note $\vec{g} \approx -g\overrightarrow{e_z}$ la pesanteur terrestre en *O* (on négligera le faible écart à la verticalité de $\vec{g}$ associé à la force d'inertie d'entraînement de la rotation de la Terre sur elle-même), et R_T le rayon terrestre.

Sous la latitude λ, une particule *M*, de masse *m*, évolue sans frottement sur le plan horizontal *xOy*. Elle se trouve, à $t=0$, à l'origine du repère $\mathscr{R}_T$, avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_o} = v_o\overrightarrow{e_y}$ $(v_o > 0)$, et n'est soumise qu'à son poids et à la force $\vec{R}$ de réaction du plan. On se propose d'étudier le mouvement de *M* par rapport au référentiel terrestre non galiléen $\mathscr{R}_T$.

a) **Réaliser** un schéma de la Terre, avec le référentiel géocentrique $\mathscr{R}_o$, le référentiel terrestre local $\mathscr{R}_T$, le vecteur rotation de la Terre $\overrightarrow{\Omega_T}$, le vecteur champ de pesanteur terrestre, et la latitude λ de *O*.

b) Approche qualitative.

1) Dans les cas de l'hémisphère nord et de l'hémisphère sud, **faire** un schéma de la situation initiale dans le plan *yOz*, sur lequel on représentera les forces en présence à $t=0$ et le vecteur rotation de la Terre.

2) En **déduire** le début de la trajectoire et le **représenter** pour chacun des cas. Conclusion ?

c) Approche quantitative.

1) A partir de considérations sur l'énergie, que peut-on dire de la vitesse $\vec{v}\left(M/\mathscr{R}_T\right)$?

2) En utilisant les résultats de l'exercice précédent, **écrire** les équations différentielles du mouvement.

3) Quelle condition doit être satisfaite par la vitesse de *A* afin qu'il reste dans le plan horizontal *xOy* ?

4) **Montrer** alors que la trajectoire de *M* est un cercle $(\mathscr{C})$ dont on **déterminera** le rayon et le centre dans les deux hémisphères.

5) Quel est le sens de parcours dans chaque hémisphère ? **Représenter** la trajectoire dans chaque hémisphère.

6) Au bout de combien de temps *T* la particule repasse-t-elle par le point de départ *O* ?

d) Application numérique : **calculer** *T* et le rayon de la trajectoire, dans le cas où on se place à la latitude de Oulan-Bator $(\lambda = 48°)$, ou alors à la latitude de Valparaiso $(\lambda = -35°)$.

Problème : Spectrographes de masse (TP)

Ce problème est un des deux problèmes de l'examen de septembre 2006. Il était noté sur 12. La première partie faisait appel au thème de l'énergie qui est abordé au TD suivant mais peut être traitée avec ce qui a été vu au 1^{er} semestre en physique. Il ne sera pas traité en TD.
On rappelle que la force de Lorentz s'exerçant sur une particule de charge q, de vitesse $\vec{v}$, et soumise à un champ électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ s'écrit : $q\left[\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right]$.

On se propose de séparer les isotopes d'un même élément en utilisant plusieurs techniques de sélection des ions. Les divers dispositifs comportent tous deux étages différents :

- étage d'accélération des ions,
- étage de sélection-séparation des ions.

Rappel : charge électrique élémentaire e = 1,6 10^{-19} C, masses du proton et du neutron m_P = m_N = 1,675 10^{-27} kg, masse de l'électron m_e = 0,911 10^{-30}kg.

Les parties I, II et III du problème sont indépendantes.

Préliminaires à faire chez soi

Comparer le poids et la force électrique qui s'exercent sur un proton soumis au champ électrique $E = 3000\,\text{V.cm}^{-1}$. Application numérique (à faire calculette éteinte !). **Conclure**. *(réponse :* $\dfrac{mg}{qE}=10^{-12}$*)*

Comparer le poids et la force magnétique qui s'exercent sur un électron soumis au champ magnétique $B = 0,3\,\text{T}$ et animé d'une vitesse $v = 10^{7}\,\text{m.s}^{-1}$. Application numérique (à faire calculette éteinte !). **Conclure**. *(réponse :* $\dfrac{mg}{qvB}=10^{-16}$*)*

I- Accélération des ions

Les ions, de charge *q* et de masse *m*, émis à partir d'un filament, ont une énergie cinétique considérée comme nulle lorsqu'ils arrivent sur la plaque *A* du condensateur qui va les accélérer.

Ce condensateur est constitué de deux plaques verticales *A* et *B* distantes de *a* et percées d'un trou (Figure 1).

Entre les plaques est appliquée la d.d.p $U = V_A - V_B$. Le champ électrique qui règne est $\overrightarrow{E_o} = \dfrac{U}{a}\overrightarrow{e_x}$.

1- **Déterminer**, par la méthode de votre choix, l'énergie cinétique en B pour un ion de charge $q > 0$ en fonction de q et U, ainsi que la vitesse des ions en B, notée par la suite v_o, en fonction de q, U et m.

2- Application numérique : U est égale à 5000 volts.

- **Déterminer** v_o pour les ions lithium (2 électrons, 3 protons) suivants : $^6Li^+$ et $^7Li^+$ (soit respectivement 3 et 4 neutrons)

- **Justifier** le fait que l'on ait considéré l'énergie cinétique en A comme nulle sachant qu'elle est de l'ordre de 1/10 eV, soit 0,16 10^{-19} J.

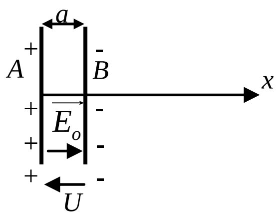


Figure 1

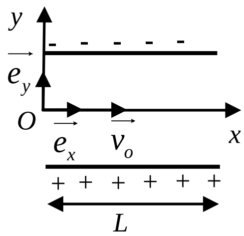


Figure 2

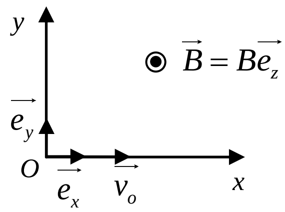


Figure 3

II- Séparation des ions par une méthode électrostatique

Suite à l'étape d'accélération, les ions pénètrent en O, avec la vitesse initiale $\vec{v}_o = v_o\vec{e}_x$ entre les plaques horizontales d'un nouveau condensateur où règne le seul champ électrostatique $\vec{E} = E\vec{e}_y$ ($E > 0$) (Figure 2).

1- **Etablir**, par application de la relation fondamentale de la dynamique, les équations différentielles du mouvement, relatives à $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

2- **En déduire** $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

3- **En déduire** l'équation $y(x)$ de la trajectoire, ainsi que la pente de la courbe en $x = L$, en fonction de $\frac{q}{m}$, E, L et v_o.

4- Quelle est la trajectoire des ions après le condensateur (justifier sans aucun calcul) ?

5- A la question I-1, on a montré que v_o dépend du rapport $\frac{q}{m}$.

En admettant que $v_o = K\left(\frac{q}{m}\right)^{1/2}$ (K constante positive), **montrer** que la pente ne dépend pas de $\frac{q}{m}$. L'ensemble du dispositif permet-il de séparer les ions ?

III- Séparation par une méthode magnétostatique

On rappelle que la force magnétique exercée sur une particule chargée de charge q par un champ magnétostatique $\vec{B}$ est $\vec{F_m} = q\vec{v}(t) \times \vec{B}$.

Suite à l'étape d'accélération, les ions, animés de la vitesse initiale $\vec{v_o} = v_o \vec{e_x}$, pénètrent en O (Figure 3) dans une région où règne cette fois-ci le **seul** champ magnétostatique uniforme $\vec{B} = B\vec{e_z}$ ($B > 0$).

1- **Etablir**, par application de la relation fondamentale de la dynamique les équations différentielles du mouvement , relatives à $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

2- On se propose de déterminer la trajectoire par une méthode différente de la résolution des équations différentielles.

a- En utilisant les propriétés du produit vectoriel, **montrer** qu'à tout instant la force est perpendiculaire à la vitesse.

b- **En déduire** que l'accélération est, à tout instant, perpendiculaire à la trajectoire. A quoi est égale l'accélération tangentielle ?

c- **Donner** l'expression générale du vecteur accélération dans la base de Frénet.
En déduire que le module de la vitesse est constant et donc égal à v_o.
Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.
Exprimer le module de l'accélération en fonction de q, m, B et v_o.

d- **Exprimer** la relation entre R (rayon de courbure de la trajectoire), q, m, B et v_o. Quelle est la trajectoire ?

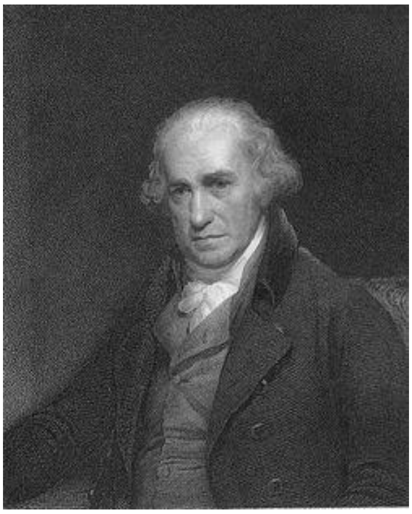
3- a- Compte tenu de la relation $v_o = K\left(\frac{q}{m}\right)^{1/2}$, **exprimer** la relation entre R et $\frac{q}{m}$.

b- **En déduire** la différence dR entre les rayons des trajectoires pour deux ions dont les valeurs de $\frac{q}{m}$ diffèrent infiniment peu d'une quantité $\mathrm{d}\left(\frac{q}{m}\right)$.

c- **En déduire** la différence relative dR/R en fonction de la différence relative de $\frac{q}{m}$, $\frac{\mathrm{d}(q/m)}{(q/m)}$.

Application numérique : pour les ions $^{6}Li^{+}$ et $^{7}Li^{+}$, l'écart $\Delta\left(\frac{q}{m}\right)$ est suffisamment faible pour qu'on puisse le considérer comme égal à l'élément différentiel $\mathrm{d}\left(\frac{q}{m}\right)$. Dans ces conditions, **calculer** $\Delta R/R$.

Thème 4 :
Energétique



James Watt (1736-1819)

Mathématicien et ingénieur écossais, Watt a contribué à améliorer la machine à vapeur, étape clé dans la révolution industrielle.

Objectifs :

- Définir énergie cinétique, énergie potentielle et énergie mécanique.
- Identifier les forces conservatives ou non conservatives.
- Définir la puissance de toutes les forces, y compris des forces d'inertie.
- Enoncer et appliquer les théorèmes de l'énergie mécanique et de l'énergie cinétique.
- Définir un équilibre stable, un équilibre instable, et trouver les positions d'équilibre.

1CV : quantité d'énergie indispensable pour faire en sorte qu'un poids de 75 kilos s'élève de 1 mètre en 1 seconde.

Questionnaire :

1. L'énergie cinétique d'un point matériel $M(m)$ en mouvement à la vitesse $\vec{v}(M)$ par rapport au référentiel $\Re$ est :

- ○ $E_c = mv$
- ○ $E_c = \frac{1}{2}mv$
- ○ $E_c = mv^2$
- ○ $E_c = \frac{1}{2}mv^2$
- ○ Aucune réponse n'est correcte

2. Le travail d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M le long d'un trajet allant du point A au point B entre les instants t_1 et t_2 en suivant la courbe $(\wp)$ est :

- ○ $W(\vec{F}) = \int_{t_1}^{t_2} P(\vec{F})\mathrm{d}t$
- ○ $W(\vec{F}) = \int_{A}^{B} P(\vec{F})\mathrm{d}\ell$, $d\ell$ étant le déplacement élémentaire
- ○ $W(\vec{F}) = \oint_{(\wp)} \vec{F}.\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$, $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ étant le déplacement élémentaire
- ○ $W(\vec{F}) = mg(z_B - z_A)$
- ○ Aucune réponse n'est correcte.

3. La puissance $P(\vec{F})$ d'une force $\vec{F}$ appliquée en un point M possédant une vitesse $\vec{v}(M)$ par rapport au référentiel $\Re$ est :

- ○ $P(\vec{F}) = \vec{F} \wedge \vec{v}(M)$.
- ○ $P(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{v}(M)$.
- ○ $P(\vec{F}) = \vec{v}(M) \wedge \vec{F}$.
- ○ Toujours positive.
- ○ Aucune réponse n'est correcte.

4. L'énergie mécanique d'un système est définie comme :

- ○ La dérivée de l'énergie potentielle du système.
- ○ La somme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.
- ○ La dérivée de l'énergie cinétique du système.
- ○ Constante quel que soit les forces appliquées au système.
- ○ Aucune réponse n'est correcte.

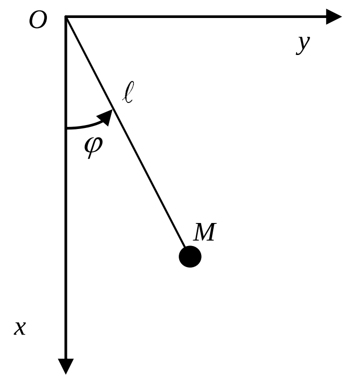
5. Un point matériel M est dit à l'équilibre en x_0 si :

- ○ Déposé en ce point sans vitesse, il reste en ce point.
- ○ La somme des forces agissant sur M en x_0 est nulle.
- ○ La variation de l'énergie potentielle du point M en x_0 est nulle.
- ○ Aucune réponse n'est correcte.

Exercices :

Exercice 1 : Le pendule simple : passage en force mais aussi avec énergie

On souhaite établir l'équation $\varphi(t)$ d'un pendule oscillant dans le plan vertical (Figure ci-contre).



Pour cela, deux méthodes différentes vont être utilisées :

- la première reprend le thème précédent : la dynamique.
- la seconde utilise la méthode énergétique.

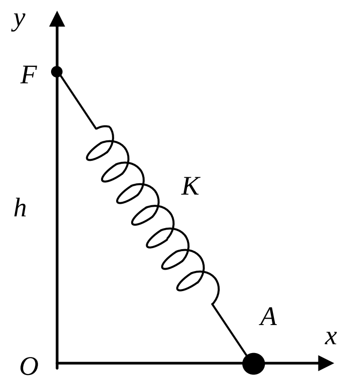
Bien évidemment, les deux méthodes permettent d'aboutir au même résultat. Par contre, bien souvent, l'une ou l'autre des méthodes permet de résoudre plus facilement le problème posé. Lorsque la méthode est au choix de l'étudiant, une réflexion s'impose avant de commencer les calculs, afin de choisir la "bonne" méthode.

a) Après avoir fait le choix de la base qui semble la plus adaptée, **établir** l'équation différentielle à laquelle obéit φ.
b) **En appliquant** le théorème de l'énergie cinétique, **retrouver** cette équation différentielle.
c) **Retrouver** cette équation avec le théorème de l'énergie mécanique.
d) En se plaçant dans le cas des oscillations de faible amplitude, **résoudre** complètement l'équation différentielle du mouvement.

On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$: $\varphi(0) = 0$ et $\dot{\varphi}(0) = \frac{\pi}{4}\,\text{rad.s}^{-1}$.

Exercice 2 : Effet non linéaire sur un pendule élastique vertical

Une masselotte *A*, de masse *m*, coulisse sans frottement sur une tige horizontale *Ox*. Elle est soumise à l'action d'un ressort, de raideur *K* et de longueur à vide l_0, dont l'extrémité fixe *F* est située à une distance *h* de la tige (Figure ci-contre).



On désigne par *x* l'abscisse de *A* sur la tige, comptée à partir de *O*, projection de *F* sur l'axe associé à la tige.

On étudie le mouvement de *A* par rapport au référentiel $\mathscr{R} = (Oxyz)$ que l'on supposera galiléen.

a) **Réaliser** le bilan des forces s'exerçant sur *A*. Les **exprimer** dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
b) **Montrer** que l'expression de l'énergie potentielle de *A* est :

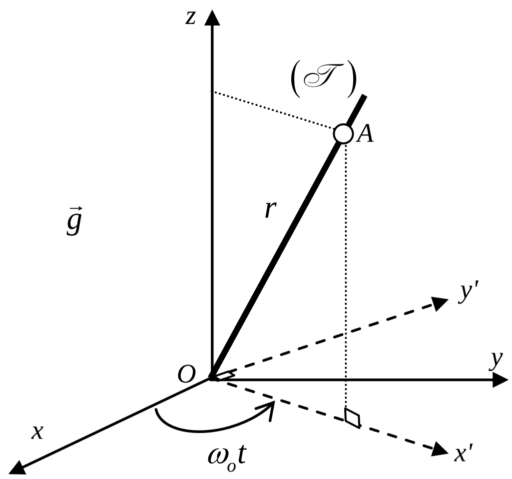
$$\varepsilon_p(x) = K\left[\frac{x^2}{2} - l_o(x^2+h^2)^{1/2} + l_o h\right]$$ si l'origine des énergies potentielles est choisie en *x* = 0.

c) Que devient $\varepsilon_p(x)$ lorsque $h = 0$? Quelle est alors l'équation différentielle en x décrivant le mouvement de A ? N'a-t-on pas affaire ainsi à un oscillateur harmonique ? **Calculer** sa fréquence propre sachant que K = 400 N .m^{-1} et m = 0,1 kg.

d) Pour h quelconque, **étudier** la fonction $\varepsilon_p(x)$, puis tracer le graphe correspondant. Quelles sont les positions d'équilibre stables x_e?
Application numérique : **calculer** x_e dans le cas où h = 10 cm et l_o = 15 cm.

e) A partir du développement au second degré de $\varepsilon_p(x)$ autour de $x = x_e$, **trouver**, à l'aide du théorème de la puissance mécanique, l'expression de la pulsation des petits mouvements autour des positions d'équilibre stable. **Calculer** la fréquence de ces oscillations avec les données de la question c).

Exercice 3 : Mouvement dans un référentiel non galiléen



Une masselotte A, de masse m, peut coulisser sans frottements, sur une tige $(\mathscr{T})$. On note r la distance OA entre l'extrémité de la tige et la masselotte A considérée comme ponctuelle.
Cette tige, inclinée de l'angle θ_o par rapport à l'axe Oz du repère galiléen $\mathscr{R}(O,xyz)$, tourne uniformément à la vitesse angulaire ω_o autour de Oz.
On note $\mathscr{R}'(O,x'y'z')$ le repère orthonormé direct lié à la tige, et indiqué sur la figure ci-contre.

A l'instant initial, A est lâché sans vitesse initiale à la distance r_o et l'on cherche à étudier le mouvement ultérieur de A dans $\mathscr{R}'$.

a) **Effectuer** le bilan des forces qui s'exercent sur A.

b) **Calculer** l'énergie potentielle associée à la force d'inertie d'entraînement.

c) **En déduire** l'expression de l'énergie potentielle totale $\mathscr{E}_p(r)$ (On prendra l'origine de l'énergie potentielle en O).

d) **Déterminer** la position d'équilibre r_e de l'anneau et discuter de sa stabilité.

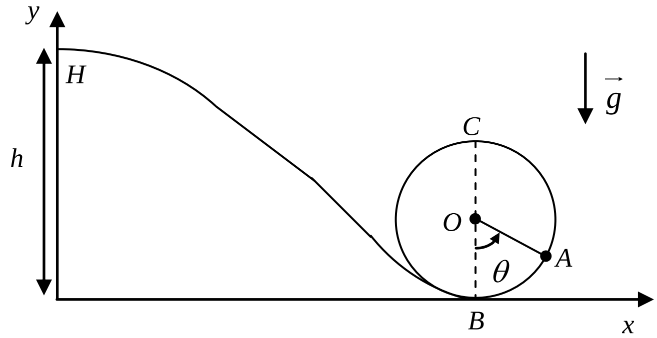
e) **Donner** l'allure de la courbe $\mathscr{E}_p(r)$. Selon la valeur de r_o par rapport à r_e, discuter des différents mouvements possibles de A sur la tige une fois qu'il est lâché.

Exercice 4 : Mouvement d'un point matériel guidé sur une courbe circulaire (TP)

Dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}(O, xyz)$ supposé galiléen, un point matériel *A*, de masse *m*, se déplace sur un rail situé dans un plan vertical (Figure ci-dessous). Le rail comporte une partie circulaire, de diamètre $BC = 2\,l$, que le mobile parcourt à l'intérieur du cercle.

Le point est libéré sans vitesse initiale en *H* à la hauteur *h* au-dessus de *B*, point le plus bas du cercle, et on étudie uniquement le mouvement de *A* dans la partie circulaire.

La liaison est unilatérale et on néglige tous les frottements.



1- Par application du théorème de l'énergie, **exprimer** la vitesse $\vec{v}(A/\mathscr{R})$ de *A* dans $\mathscr{R}$ en fonction de l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right)$.

2- Par application du principe fondamental de la dynamique dans le repère de Frénet, **donner** l'expression de la réaction $\vec{R}$ exercée par le guide sur *A* en fonction de θ.

3- Quelle condition traduit l'existence du contact entre le point matériel et le rail ?
Montrer que cela se traduit dans cet exercice par la relation $E_m > E_p(\theta) - \frac{1}{2} mgl\cos\theta$.

4- De quelle hauteur minimale h_{min}, doit-on lâcher le point pour qu'il fasse le looping sans perdre le contact ?

5- Dans le cas particulier où $h = 3\,l$, $l = 10$ m et $m = 350$ kg, **calculer** les vitesses de passage en *B* et *C* ainsi que les réactions du rail lors du passage en ces points.

Eléments de réponse :

1. $v(A/\mathscr{R}) = \left\{2g\left[h - l(1-\cos\theta)\right]\right\}^{1/2}$
2. $\vec{R} = R\vec{e_n}$ *avec* $R = mg\left[3\cos\theta + 2\left(\frac{h}{l} - 1\right)\right]$
3. $R > 0 \rightarrow E_m > E_p(\theta) - \frac{1}{2} mgl\cos\theta$
4. *Par définition de* E_m, $E_m \geq E_p$ *; par ailleurs, ici,* $E_m > E_p(\theta) - \frac{1}{2} mgl\cos\theta$.

   Ainsi, $h > h_{\text{min}} = \frac{5}{2} l$.
5. $v_B = 24{,}5\ ms^{-1}$; $v_C = 14{,}1\ ms^{-1}$; $R_B = 24{,}5\ kN$; $R_C = 3{,}5\ kN$.

Exercice 5 : Applications à la réalité ! (TP)

1- Une dépanneuse remorque une voiture en panne sur une côte à 20%. En supposant que le câble fait 30° avec le plan de la route et que la tension est constante et vaut 1600 N, quel est le travail effectué par la dépanneuse sur la voiture si elle la remorque sur une distance de 500 mètres ? *(Réponse : $W = 6{,}9.10^5$ J)*

2- Un tambour de 30 cm de diamètre tourne à 10 tours par minute autour de son axe horizontal. Un fil est enroulé autour du tambour. Ce fil porte à son extrémité une charge de 200 N. Quel est le travail effectué par le fil sur la charge, s'il la hisse à vitesse constante pendant 2 minutes ? *(Réponse : $W = 3{,}8.10^3$ J)*

3- En marchant normalement à vitesse constante, une personne exerce une force d'environ 0,3 N pour surmonter la résistance de l'air. Quel est le travail de cette personne pour vaincre la résistance de l'air en parcourant deux fois une piste circulaire de rayon 0,25 km ? *(Réponse : $W = 9.10^2$ J)*

4- L'ascenseur express de la tour Sears à Chicago a une vitesse moyenne de 548,6 $m.min^{-1}$, lors de sa montée depuis le rez-de-chaussée jusqu'au 103ème étage, à 408,4 m au-dessus du sol. Supposant que la charge totale est de 1 tonne, quelle est la puissance moyenne de son moteur ?
(Réponse : $P_{moy} = 90$ kW)

5- La vitesse de décollage d'un avion de ligne Boeing 747, pesant $2{,}2.10^6$ N, est de 268 m/s. Calculer alors son énergie cinétique. Sachant qu'un kilo de TNT produit une énergie de $4{,}6.10^6$ J, quelle est la masse de TNT équivalent à cette énergie cinétique ?
(Réponses : $E_k = 8{,}0.10^9$ J ; $masse_{TNT} = 1{,}7$ tonnes)

6- Selon, le livre des records, Alexandre Zass (surnommé « Samson »), quand il ne pliait pas des barreaux de fer, pouvait attraper une femme de 463 N tirée d'un canon à une vitesse proche de 72 $km.h^{-1}$. En supposant que Samson stoppait notre héroïne en la ralentissant uniformément sur une distance de 1 mètre, calculer la force qu'il exerçait alors. On suppose que la vitesse de la femme était de 8,94 m/s lorsque Samson l'attrapait. *(Réponse : $F = 1{,}89$ kN)*

7- Quelle est la variation d'énergie potentielle d'un météorite de 100 kg, s'il tombe en chute libre de 1000 km jusqu'à la surface de la Terre. La Terre a une masse de $6{,}0.10^{24}$ kg et un diamètre de $1{,}28.10^7$ m. *(Réponse : $\Delta E_p = -8{,}5.10^8$ J)*

8- Un sauteur portant sa perche (tube épais de masse environ 2 kg en graphite et fibre de verre) se prépare à franchir la barre. A quelle vitesse doit-il courir pour atteindre 6,10 m de hauteur ? Négligez toute perte d'énergie et supposez que son centre de gravité est à 1 m du sol. *(Réponse : $v = 10$ ms^{-1})*

9- Une skieuse de 60 kg part de l'arrêt au sommet d'une pente de hauteur 60 m et descend sans utiliser ses bâtons.

(a) Quelle est son énergie potentielle gravitationnelle initiale par rapport au bas de la pente ? *(Réponse : $E_{pi} = 3{,}5.10^4$ J)*

(b) En négligeant les frottements, calculez sa vitesse théorique au bas de la pente ? *(Réponse : $v_f = 34$ $m.s^{-1}$)*

(c) En fait, elle atteint le bas avec une vitesse de 25 $m.s^{-1}$. Quelle est l'énergie totale perdue par frottements ? *(Réponse : $W_f = -1{,}7.10^4$ J)*

10- Soit une planète immobile de rayon *R* et de masse *M*. Quel travail doit être effectué sur une fusée de masse *m*, pour l'éloigner lentement de la surface de cette planète jusqu'à une distance infinie ? On négligera tout frottement. *(Réponse : $W = GMm/R$)*

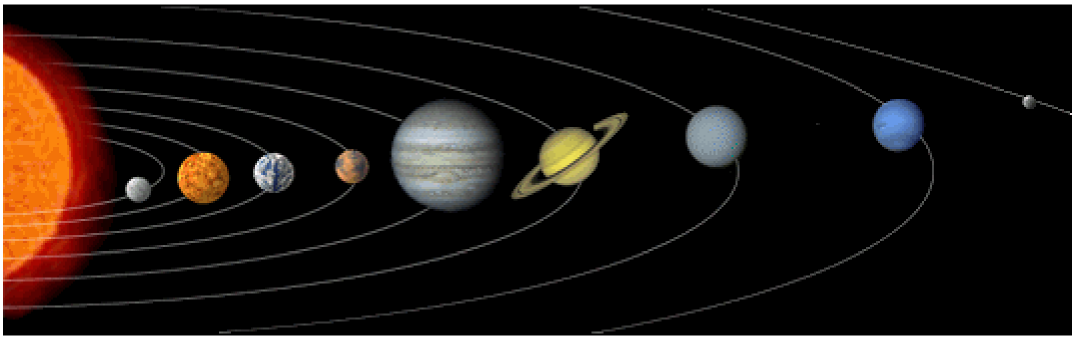
Thème 5 :
Mouvement dans un champ de forces centrales conservatives

Johannes Képler ou Keppler (1571-1630)

Képler découvre que les planètes suivent des trajectoires elliptiques autour du soleil et énonce les relations mathématiques qui régissent leur mouvement.

Objectifs :

- Définir référentiel géocentrique, quantité de mouvement et moment cinétique en un point
- Enoncer le théorème du moment cinétique en un point
- Enoncer les lois générales de conservation (loi des aires, énergie mécanique)
- Enoncer les lois de Kepler
- Définir l'excentricité e et en déduire la trajectoire associée en fonction de la valeur de e



Tous les corps célestes qui composent le système solaire gravitent autour du soleil suivant des orbites elliptiques. En première approximation ces ellipses sont assimilables à des cercles ayant pour centre le centre du soleil, sauf pour deux exceptions : Pluton et Mercure. Les trajectoires des planètes autour du soleil sont toutes contenues dans un même plan (l'écliptique) à l'exception de Mercure (inclinaison de 9°) et de Pluton (inclinaison de 17,2°). Les planètes rocheuses sont: Mercure, Vénus, la Terre, Mars et Pluton. Les planètes géantes essentiellement gazeuses sont: Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. Les comètes se composent de glace. Les météorites sont faites de roches ou de métal.

Questionnaire :

1. La force d'interaction gravitationnelle est :

- ○ Conservative.
- ○ Non conservative.
- ○ Centrale.
- ○ Non centrale.
- ○ Aucune réponse n'est correcte.

2. Le module de la force d'interaction gravitationnelle exercée par un point A de masse M sur un point B de masse m distants de r est :

- ○ Inversement proportionnel à la distance r.
- ○ Inversement proportionnel au carré de la distance r.
- ○ Proportionnel au produit M par m.
- ○ Proportionnel à la constante de gravitation universelle.
- ○ Aucune réponse n'est correcte.

3. L'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle exercée par un point A de masse M, sur un point B de masse m, distants de r est :

- ○ Inversement proportionnelle à la distance r.
- ○ Inversement proportionnelle au carré de la distance r.
- ○ Proportionnelle au produit M par m.
- ○ Proportionnelle à la constante de gravitation universelle.
- ○ Aucune réponse n'est correcte.

4. La force d'interaction gravitationnelle $\vec{F} = F\vec{e_r}$ exercée par un point A de masse M sur un point B de masse m, distants de r :

- ○ Dérive d'un potentiel de gravitation.
- ○ Dérive d'une énergie potentielle.
- ○ Est attractive si F est positif.
- ○ Est attractive si F est négatif.
- ○ Aucune réponse n'est correcte.

Exercices :

Exercice 1 : Caractéristiques d'un mouvement à force centrale (TP)

Une particule *P*, de masse *m*, est attirée par une particule fixée en *O*, de masse *M*, selon la force $\vec{F} = -G\dfrac{mM}{r^3}\vec{r}$.

G représente la constante de gravitation, et $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$.

a) Soit $\vec{p}$ la quantité de mouvement de la particule *P*, et $\vec{L}_O$ son moment cinétique en *O*.

1) **Calculer** le vecteur $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$. Le moment cinétique est-il une constante du mouvement ?
2) **Evaluer** la quantité $\vec{L}_O.\vec{r}$.

b) On pose le vecteur $\vec{R}$ tel que $\vec{R} = \vec{p}\times\vec{L} - Gm^2M\dfrac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$.

1) **Evaluer** la quantité $\vec{L}_O.\vec{R}$, et conclure quant à l'orientation de $\vec{L}_O$ par rapport à $\vec{R}$, et celle de $\vec{R}$ par rapport au plan de la trajectoire.
2) A l'aide du calcul de $\dfrac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}$, **montrer** que le vecteur $\vec{R}$ est également une constante du mouvement.

c) Soit θ l'angle que font les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{R}$. **Déterminer** l'équation de la trajectoire de *P*. La mettre sous la forme $\|\vec{r}\| = f\left(\|\vec{L}\|, \|\vec{R}\|, \theta\right)$.

Exercice 2 : Utilisation de la formule de Binet (TP)

Un point matériel *M* de masse *m* est soumis à une force centrale $\vec{F}$ dirigée vers *O*, point fixe et origine du référentiel galiléen dans lequel est étudié le mouvement. On repère ce point par ses coordonnées polaires (r,θ).

On désigne par *C* la constante de la loi des aires, soit $r^2\dot{\theta} = C$, et on pose $u = \dfrac{1}{r}$. On rappelle la seconde formule de Binet concernant l'accélération radiale de *M* :

$$\vec{a}_r = -C^2u^2\left[u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right]\vec{u}_r$$

a) Déterminer l'expression de la force $\vec{F}$ dans le cas où le point décrit une spirale d'équation :
1) $r\theta = K$ (*K* constante),
2) $r = r_0\exp(-\lambda\theta)$ (λ constante positive)

b) Même question pour une trajectoire du type: $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$.

Exercice 3 : Troisième loi de Képler (TP)

On désigne par M la masse de la Terre et par m celle d'un satellite artificiel $(m \ll M)$. On note $\frac{C}{2}$ la vitesse aréolaire, R le rayon de la Terre, et $g_0 = 9{,}81$ m.s^{-2} le champ de gravitation à la surface de la Terre.

On désigne par z l'altitude d'un point quelconque de l'orbite du satellite, par z_A celle de l'apogée et par z_P celle du périgée.

On donne : $R = 6{,}4.10^3$ km, $z_A = 5{,}65.10^3$ km et $z_P = 0{,}95.10^3$ km.

a) **Etablir** l'expression littérale du paramètre p de la conique trajectoire en fonction de R, g_0 et de C. **Donner** son expression numérique.

b) **Calculer** littéralement l'excentricité e et le demi grand axe a de cette conique en fonction de R, z_A et z_P. Application numérique.

c) **Etablir** littéralement la période de rotation du satellite en fonction de g_0, R, z_A et z_P. Retrouver la troisième loi de Kepler. Application numérique.
On rappelle que si b est le demi-petit axe de l'ellipse, alors : $p = \frac{b^2}{a}$.

Exercice 4 : Satellites de Jupiter

En 1610, Galilée découvrit quatre lunes importantes autour de Jupiter à l'aide de sa lunette astronomique. Voici les rayons moyens a de leurs orbites, et leurs périodes T :

Nom	***a* (10^8 m)**	***T* (j)**
Io	4,22	1,77
Europe	6,71	3,55
Ganymède	10,70	7,16
Callisto	18,80	16,70

a) **Tracer** la courbe $\ln(a)$ en fonction de $\ln(T)$. Quel résultat obtenez-vous ? **Evaluer** graphiquement la dérivée de la courbe obtenue.

b) **Justifier** la forme de la courbe à partir de la troisième loi de Képler, et déduire de cette loi une valeur théorique de la dérivée précédemment évaluée.

c) **Déterminer** la masse de Jupiter à l'aide de l'intersection de cette courbe avec l'axe des ordonnées.

On donne : $G = 6{,}67.10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}.

Exercice 5 : Satellites artificiels

Soit $G = 6{,}67.10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ la constante de gravitation universelle, $R = 6378$ km le rayon moyen de la Terre, $M = 6{,}0.10^{24}$ kg la masse de la Terre et T son centre.

a) Orbites circulaires

1) **Définir** le référentiel géocentrique $\mathscr{R}_o$.

2) Dans l'approximation d'une répartition des masses à symétrie sphérique, **déterminer** l'expression du module $g(r)$ du champ de pesanteur terrestre à une distance $r > R$ de T. On le donnera ensuite en fonction de r, R, et $g_o = g(R)$.

3) **Déterminer**, en fonction de r, R, et g_o, la norme $V(r)$ de la vitesse, dans le référentiel géocentrique, d'un satellite terrestre de masse m en orbite circulaire de rayon r autour de la Terre.

4) En **déduire** la période $T(r)$ du mouvement du satellite en fonction de r, R, et g_o.

5) **Comparer** l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de gravitation d'un satellite en orbite circulaire.

6) **Donner** l'énergie mécanique du satellite.

7) Qu'appelle-t-on satellite géostationnaire ?

8) **Déterminer** le plan et l'altitude de l'orbite d'un satellite géostationnaire.

9) Peut-on lancer un satellite de telle sorte qu'il reste à la verticale de Paris ?

b) Transfert d'orbite d'un satellite

On désire faire passer un satellite d'une orbite circulaire basse $(r \approx R)$ dans le plan équatorial de la Terre à une orbite géostationnaire de rayon R_g. Pour cela, on communique une brusque variation (instantanée) de vitesse $\Delta\overrightarrow{v_B}$ au satellite en un point B de l'orbite basse, afin que le satellite se retrouve dans une orbite elliptique (orbite de transfert de Hohmann) tangente en B à l'orbite basse et tangente en un point H à l'orbite géostationnaire. On admettra que l'énergie mécanique d'un satellite en orbite elliptique est de la forme $E = -\frac{k}{a}$, où a est le demi-grand axe de l'ellipse et k une constante dépendant de la masse M de la Terre, de la masse m du satellite et de la constante G de gravitation universelle.

1) En identifiant l'expression de E à celle d'un satellite en orbite circulaire, **déterminer** k en fonction de m, R, et g_o.

2) **Faire** un schéma soigné sur lequel on placera le centre T de la Terre, les trajectoires circulaire basse et géostationnaire et l'orbite de transfert. On prendra soin de **justifier** le schéma.

3) **Déterminer** le demi-grand axe a de l'orbite de transfert en fonction de R et R_g.

4) **Déterminer** la variation de vitesse $\Delta\overrightarrow{v_B}$ (norme et direction).

5) **Déterminer** la variation de vitesse $\Delta\overrightarrow{v_H}$ (norme et direction) qu'il faudra appliquer en H pour passer sur l'orbite géostationnaire.

Thème 6 :
Les oscillateurs (TP)

Claude Cohen-Tannoudji, né le 1er avril 1933 à Constantine est un physicien français.

Avec Steven Chu et William Daniel Phillips, il reçoit le prix Nobel de Physique en 1997 pour ses travaux sur le ralentissement des atomes à l'aide de laser.

En mécanique quantique, les électrons des couches périphériques des atomes sont considérés comme des oscillateurs harmoniques. En particulier, pour les atomes qui composent l'air, leur pulsation propre correspond à une radiation ultraviolette du spectre électromagnétique, et l'étude de la puissance émise par ces oscillateurs permet d'expliquer la couleur bleue du ciel.

Pré-requis :

- Définir régime transitoire et régime permanent
- Résoudre l'équation différentielle correspondant à un système oscillateur harmonique amorti et non amorti en régime libre et soumis à une excitation constante
- Résoudre par la méthode complexe la solution particulière de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique soumis à une excitation sinusoïdale

Objectifs :

- Etablir et identifier une équation différentielle décrivant un système oscillateur harmonique amorti et non amorti en régime libre
- Etablir et identifier une équation différentielle décrivant la réponse d'un oscillateur à une excitation sinusoïdale
- Représenter la réponse temporelle d'un oscillateur
- Représenter dans le cas du régime forcé la réponse fréquentielle d'un système soumis à une excitation sinusoïdale. Identifier la résonance.

Le Professeur Tournesol est curieux de tout : botanique, physique, électronique et même radiesthésie !

Questionnaire :

1. Le nombre de vibrations par seconde d'un oscillateur est appelé :
   - ○ Période.
   - ○ Fréquence.
   - ○ Longueur d'onde.
   - ○ Pulsation.
   - ○ Aucune réponse n'est correcte.

2. La période d'un oscillateur mécanique non amorti est la durée :
   - ○ Nécessaire pour aller d'un point extrême de la trajectoire à l'autre, qui lui est symétrique par rapport à l'origine.
   - ○ Nécessaire pour revenir à la position d'équilibre en partant d'un point extrême de la trajectoire.
   - ○ S'écoulant entre 2 passages consécutifs, effectués dans le même sens, par une position donnée.
   - ○ Aucune réponse n'est correcte.

3. Pour un oscillateur mécanique non amorti :
   - ○ L'énergie cinétique est constante.
   - ○ L'énergie potentielle est constante.
   - ○ L'énergie mécanique est constante.
   - ○ L es forces appliquées sur le système sont toutes conservatives.
   - ○ Aucune réponse n'est correcte.

4. Dans le cas d'un système oscillant soumis à une excitation sinusoïdale, la réponse forcée du système correspond à :
   - ○ La solution générale de l'équation différentielle du système sans le second membre.
   - ○ La solution particulière de l'équation différentielle du système.
   - ○ La somme des deux solutions précédentes.
   - ○ La solution particulière de l'équation différentielle du système qui est une constante.
   - ○ Aucune réponse n'est correcte.

Exercices :

Exercice 1 : Le pendule simple

Un pendule simple est constitué d'une bille d'acier de masse m = 50 g suspendue à un fil de longueur L = 2 m. On l'écarte de 4° de sa position d'équilibre puis on la lâche sans vitesse initiale.

1) **Etablir** l'équation différentielle du mouvement de la masse si les frottements sont négligeables. En déduire la période de l'oscillation.

Elément de réponse : $T_0 = 2.84$ s

2) **Montrer** que la période a bien la dimension d'un temps.
3) Que vaudrait la période si on avait écarté le pendule de 8° ?

Donnée : $g = 9.81$ N.kg^{-1}

Exercice 2 : Le pendule élastique

Un solide *(S)*, de masse *m*, pouvant coulisser sans frottement sur un rail horizontal, est fixé à l'extrémité d'un ressort de masse négligeable. L'autre extrémité du ressort est accrochée à un point fixe. On repère la position de *(S)* par l'abscisse $x(t)$ de son centre de gravité, choisie nulle lorsque le système est au repos. Ainsi, $x(t)$ est directement l'écart à l'équilibre.

Données : $m = 100$ g ; $k = 50$ N.m^{-1}

1) **Etablir** l'équation différentielle du mouvement du solide *(S)*.
2) On écarte le pendule élastique défini précédemment de x_o = 10 cm avant de le lâcher sans vitesse initiale. **Déterminer** l'expression de $x(t)$.

Elément de réponse : $x(t) = 0.1\cos(22.4t)$

Exercice 3 : Essieu avant d'un véhicule

On modélise l'essieu avant d'un véhicule à l'aide de deux ressorts de raideur k et de longueur à vide l_0, et positionnés l'un à côté de l'autre. Une masse $\frac{m}{2}$ égale à la moitié de la masse m du véhicule est posée sur l'essieu. On travaille dans le référentiel terrestre $\Re\left(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$ supposé galiléen ($\vec{e_z}$ verticale ascendante). Le seul mouvement étudié est le mouvement vertical selon l'axe $\left(O,\vec{e_z}\right)$. On suppose les roues indéformables (de rayons constants).

Données : m = 1 tonne ; k = 19 kN.m^{-1} ; l_0 = 40 cm

1) **Montrer** que ce dispositif est équivalent à un unique ressort dont on déterminera les caractéristiques.

2) Le véhicule étant à l'arrêt, on enfonce la masse $\frac{m}{2}$ de 5 cm. On note z_o l'abscisse initiale. On lâche la masse à t = 0, sans vitesse initiale.

a) **Ecrire** l'équation différentielle du mouvement.
b) **Déterminer** la solution.
c) **Déterminer** l'accélération maximale.

Le modèle vous semble-t-il réaliste ?

Exercice 4 : Oscillations forcées d'une particule sur un cerceau mobile

Une particule, assimilée à un point matériel *M* de masse *m*, se déplace sur la rainure intérieure d'un cerceau de centre *O*, de rayon *R* et d'axe horizontal *Oz*, avec une force de frottement visqueux $\vec{f} = -\alpha\,\vec{v}$, où $\vec{v}$ désigne la vitesse relative de la particule par rapport au cerceau, et α est un coefficient positif constant.
La particule est repérée par l'angle orienté $\theta = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right)$, où *Ox* désigne la verticale descendante. On supposera θ petit dans tout le problème. On désigne par *g* l'accélération de la pesanteur.

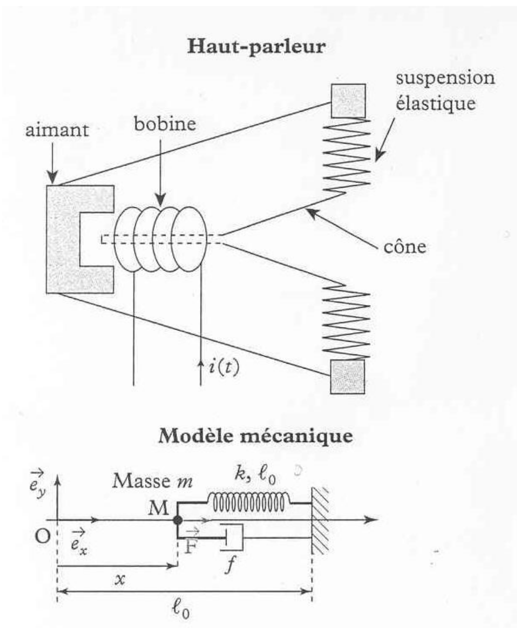
La particule est abandonnée à l'instant initiale $t = 0$ depuis la position θ_0 sans vitesse initiale par rapport au cerceau.
Le cerceau est animé d'un mouvement oscillatoire de rotation, de faible amplitude autour de son axe de révolution *Oz* : $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\Omega\, t)$, où $\varphi = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}\right)$, *OA* désignant un rayon fixe du cerceau.

1) **Ecrire** l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $\theta(t)$.

2) **Déterminer** l'amplitude θ_M de l'élongation $\theta(t)$ en régime forcé, ainsi que le rayon R_r du cerceau qui permet d'obtenir la résonance d'amplitude.

Exercice 5 : Modélisation d'un haut-parleur

On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur, alimenté par le courant $i(t)$, à l'aide d'une masse *m*, se déplaçant horizontalement sans frottement le long de l'axe $\left(O, \overrightarrow{e_x}\right)$. Cette masse, assimilée à un point matériel *M(m)*, est reliée à un ressort, de longueur à vide l_0 et raideur *k*, et à un amortisseur fluide de constante *f*. Elle est également soumise à la force $\overrightarrow{F}(t) = K\, i(t)\, \overrightarrow{e_x}$, où *K* une constante.



On travaille dans le référentiel galiléen terrestre $\Re\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$, et on suppose que le courant d'alimentation $i(t)$ est sinusoïdal et vérifie $i(t)=I_m\cos(\omega t)$, avec ω la pulsation du générateur.

1) **Ecrire** l'équation différentielle vérifiée par la position de la masse *m*.

2) a) **Normaliser** l'équation en faisant apparaître la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité *Q*.

b) On souhaite avoir $Q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. En déduire la valeur du coefficient *f*. On conservera cette valeur pour la suite de l'exercice.

3) **Déterminer** l'expression de la réponse forcée *x(t)*. On la mettra sous la forme $X_m\cos(\omega t+\varphi)$, et on donnera les expressions de X_m et φ.

4) **Tracer** l'allure de la courbe $X_m(\omega)$. En déduire la bande passante du système.

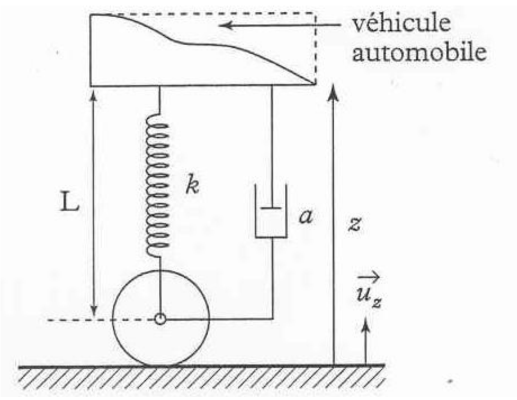
Problème : Comportement routier d'une automobile

On se propose d'étudier quelques problèmes relatifs à la suspension d'un véhicule automobile et au comportement dynamique de ce véhicule sur route déformée.

A) Modèle simplifié de la suspension

La suspension d'une automobile est habituellement assurée par quatre systèmes identiques indépendants, montés entre le châssis du véhicule et chaque arbre de roue, constitués chacun :

- D'un ressort métallique hélicoïdal de constante de raideur *k* et de longueur à vide l_0.
- D'un amortisseur tubulaire à piston à huile, fixé parallèlement au ressort, exerçant une force résistante de frottement visqueux de coefficient d'amortissement *f*.



On suppose que la masse M du châssis est également répartie entre les quatre systèmes. Les pneus de rayon extérieur R sont considérés comme entièrement rigides et n'interviennent pas dans l'étude. Tous les déplacements verticaux seront comptés algébriquement suivant la verticale ascendante de vecteur unitaire $\vec{e_z}$.

1) Le véhicule étant immobile sans frein sur un sol horizontal, quelle est la longueur l_e des ressorts au repos et la garde au sol z_0 du véhicule ?

2) Lors d'un essai dynamique à vide, le châssis est abaissé d'une hauteur h, puis brusquement libéré sans vitesse initiale.

a) **Etablir** l'équation différentielle de la position verticale $z(t)$ du châssis par rapport au sol sous la forme :

$$\ddot{z} + \alpha\,\dot{z} + \beta\,z = \delta$$

où α, β et δ sont des constantes que l'on exprimera en fonction de f, k, M et z_0.

b) On usine l'amortisseur de manière à obtenir un retour à la position d'équilibre final le plus bref possible. Quelle doit être la valeur de α en fonction de β ? En déduire l'expression de f en fonction de M et k.

c) **Déterminer** alors l'expression complète de la solution $z(t)$ en fonction de z_0, h et $\omega_0 = 2\sqrt{\dfrac{k}{M}}$.

d) **Tracer** le graphe $z(t)$. On prendra pour échelle : $z_0 = 1$, $h = z_0/4$, $\omega_0 = 1$.

3) On effectue de nouveau le même essai en charge nominale, le véhicule contenant quatre personnes de masses égales chacune à m, également réparties sur les quatre systèmes. La garde au sol est $z_0^{'}$.

a) **Etablir** la nouvelle équation différentielle vérifiée par $z(t)$ sous la forme :

$$\ddot{z} + \alpha'\dot{z} + \beta' z = \delta'$$

Exprimer les nouvelles constantes α', β' et δ' en fonction de f, k, m et $z_0^{'}$.

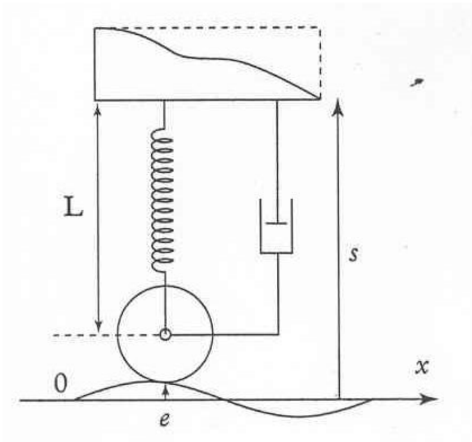
b) **Montrer** que, dans ces conditions, le véhicule oscille.

c) **Déterminer** l'expression de la période T des oscillations autour de la position d'équilibre finale en fonction de k, M et m.

d) On souhaite obtenir $T = \dfrac{\pi}{3}$ pour M = 1000 kg et m = 100 kg. **En déduire** la valeur de k puis de a.

B) Etude de la réponse harmonique

1) On étudie maintenant le comportement sur route difficile du véhicule avec ses quatre passagers de masse m chacun.



a) On modélise la route rectiligne dans la direction x par un sol ondulé sinusoïdalement autour de la cote de référence horizontale 0 suivant la relation :

$$e(x) = e_m \cos(\gamma x)$$

Quelle est, en fonction de γ, la distance λ entre deux bosses ?

Quelle est la pulsation ω des oscillations verticales imposées aux roues si le véhicule roule à une vitesse constante V ?

b) On repère maintenant le châssis par sa position $s(t)$ par rapport à la cote de référence 0 liée au référentiel terrestre supposé galiléen. On néglige le décalage angulaire du point de contact pneu-route par rapport à la verticale.

Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la position $s(t)$ du châssis est de la forme :

$$\ddot{s} + \alpha' \dot{s} + \beta' s = u + \delta'$$

où u est une fonction du temps que l'on exprimera en fonction de e et de $\dot{e}$.

2) On étudie le régime forcé permanent.

a) **Expliquer** la signification de cette expression.

b) En utilisant les notations complexes, exprimer l'amplitude complexe $\underline{S}$ des oscillations du châssis en fonction de e_m, ω, α' et β', sous la forme :

$$\underline{S} = e_m \frac{1 + j\dfrac{\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 + j\dfrac{\Omega}{Q}}$$

où $\Omega = \dfrac{\omega}{\omega_0'}$ est la pulsation réduite, ω_0' et Q étant des constantes que l'on exprimera en fonction de α' et β' puis de a, k, M et m.

c) **En déduire** l'amplitude S des oscillations en fonction de Ω et Q. Que vaut-elle si $\Omega = 1$?

d) On montre que S atteint un maximum S_m tel que :

$$\frac{S_m}{e_m} = \sqrt{\frac{1}{1 - \Omega_m^4}}$$

Calculer Q, Ω_m et $\dfrac{S_m}{e_m}$. Discuter.

e) **Tracer** avec soin le graphe $\dfrac{S}{e_m}$ en fonction de Ω pour $0 \le \Omega \le 10$.

f) **Calculer** la pulsation propre ω_0'. **En déduire** la distance λ_m entre les ondulations du sol provoquant la résonance des oscillations du châssis si le véhicule roule à une vitesse V de 90 km/h. Comment réagit le châssis sur des déformations plus rapprochées passées à la même vitesse ?

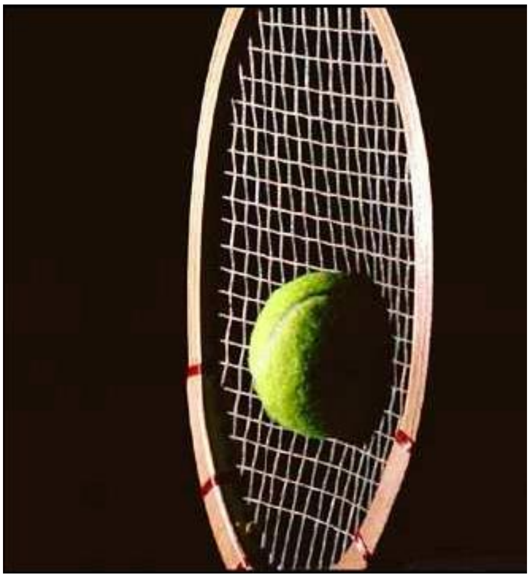
Thème 7 :
Les collisions (TP)

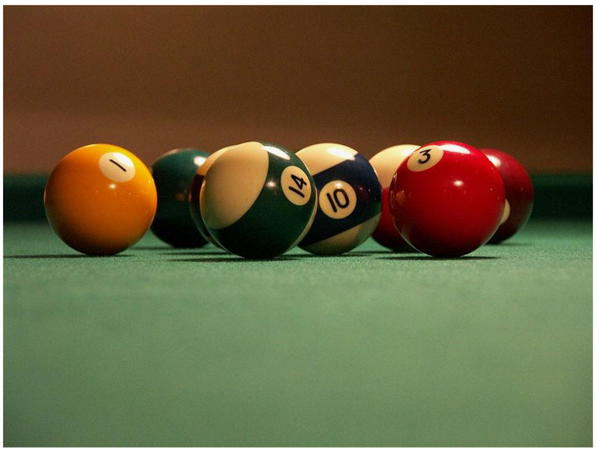
Ernest Rutherford (1871-1937)

Prix Nobel de chimie en 1902, c'est en 1911 qu'il fera sa plus grande contribution à la science en découvrant le noyau atomique : en bombardant une fine feuille de mica avec des particules alpha, on obtient une déflexion de ces particules.

Objectifs :

- Définir une collision, une collision élastique, une collision inélastique, une collision parfaitement inélastique.
- Enoncer le théorème de la quantité de mouvement.
- Définir le centre de masse et la vitesse associée, ainsi que le référentiel du centre de masse.





Collisions élastique ou inélastique ?

Exercices :

Exercice 1 : L'impulsion et la quantité de mouvement

a) Une queue de billard frappe une boule immobile avec une force moyenne ayant un module de 50 N durant un intervalle de temps de 10 ms. Si la boule a une masse de 0.20 kg, quel est le module de la vitesse juste après l'impact ?

b) En février 1955, un parachutiste a fait une chute de 370 m sans pouvoir ouvrir son parachute ; il a atterri dans la neige ne subissant que de légères blessures. On suppose que la vitesse lors de l'impact était de 56 m/s (vitesse limite), que sa masse (y compris l'équipement) était de 85 kg et que le module de la force exercée sur lui était de $1{,}2.10^5$ N (ce qui correspond au module de la force maximale que peut supporter un être humain).

1) Quelle est l'épaisseur minimale de neige qui l'a immobilisé sans danger ?

2) Quel est le module de l'impulsion exercée sur lui par la neige ?

c) Une balle de 1,2 kg tombe verticalement sur un plancher, le frappant à une vitesse ayant un module de 25 m/s. Elle rebondit à une vitesse dont le module est de 10 m/s.

1) Quel est le module de l'impulsion qui agit sur la balle durant le contact ?

2) Si la balle est en contact avec le plancher durant 20 ms, quel est le module de la force moyenne qu'exerce sur elle le plancher ?

d) Un fusil à air comprimé tire dix projectiles de 2 g par seconde à une vitesse de 500 m/s. Les projectiles sont immobilisés par un mur rigide.

1) Quel est le module de la quantité de mouvement de chaque projectile, l'énergie cinétique de chaque projectile et le module de la force moyenne que le bombardement de projectiles exerce sur le mur ?

2) Si chaque projectile est en contact avec le mur durant 0,60 ms, quel est le module de la force moyenne exercée sur le mur par chaque projectile ? Pourquoi est-ce que cette force moyenne est différente de celle calculée au 1) ?

Exercice 2 : Les collisions inélastiques à une dimension

a) Une balle de 5,20 g se déplaçant à 672 m/s heurte un bloc de bois de 700 g immobile sur une surface sans frottement. La balle sort du bloc, dans la même direction, à une vitesse réduite de 428 m/s.

1) Quelle est la vitesse finale du bloc ?

2) Quelle est la vitesse du centre de masse du système balle-bloc ?

b) Un traîneau de 6 kg glisse sur une patinoire sans frottement à une vitesse de 9 m/s. Une boîte de 12 kg tombe sur le traîneau de façon verticale. Quelle est la nouvelle vitesse du système traîneau-boîte ?

c) On croit que le Meteor Crater en Arizona a été formé par l'impact d'une météorite avec la Terre il y a environ 20 000 ans. On estime que la masse de la météorite était 5.10^{10} kg, et que sa vitesse était de 7200 m/s. Quelle est la vitesse qu'une telle météorite aurait donnée à la Terre dans une collision frontale ?

d) Deux voitures, A et B, glissent sur une rue glacée en essayant de s'arrêter à un feu de circulation. La masse de A est de 1100 kg ; la masse de B est de 1400 kg. Le coefficient de frottement cinétique entre les roues bloquées de chaque voiture et la rue est 0,13. La voiture A réussit à s'arrêter au carrefour, mais la voiture B ne peut s'immobiliser et heurte l'arrière de la voiture A. Après la collision, la voiture A s'arrête à 8,2 m de la position qu'elle occupait lors de l'impact, et la voiture B à 6,1 m du point d'impact comme indiqué sur la figure ci-dessous. On suppose que les deux conducteurs maintenaient les freins enfoncés durant tout l'incident.

1) D'après la distance parcourue par chaque voiture après la collision, **déterminer** les vitesses des voitures A et B immédiatement après l'impact.

2) A partir du principe de la conservation de la quantité de mouvement, **déterminer** la vitesse à laquelle la voiture B a heurté la voiture A. Sur quel point peut-on ici critiquer l'utilisation du principe de la conservation de la quantité de mouvement ?

e) Un bloc de 5 kg se déplaçant à 3 m/s heurte un bloc de 10 kg, qui se déplaçait à 2 m/s dans la même direction. Après la collision, le bloc de 10 kg se déplace dans la direction initiale à 2,5 m/s.

1) Quelle est la vitesse du bloc de 5 kg immédiatement après la collision ?

2) Quelle est la variation de l'énergie cinétique totale du système formé par les deux blocs en raison de la collision ?

3) On suppose maintenant que la vitesse finale du bloc de 10 kg est 4 m/s. **Déterminer** alors la variation de l'énergie cinétique totale. Expliquer le résultat obtenu.

f) Un bloc de masse $m_1 = 2$ kg glisse sur une table sans frottement à une vitesse de 10 m/s. Directement devant lui, un bloc de masse $m_2 = 5$ kg se déplace à 3 m/s dans la même direction. Un ressort sans masse de constante $k = 1\,120$ N/m est fixé à la face droite de m_2.

Quand les blocs entrent en collision, quelle est la compression maximale du ressort ? (On considère qu'à l'instant de la compression maximale du ressort, les deux blocs se déplacent ensemble. On **déterminera** alors la vitesse sachant que la collision est parfaitement inélastique à ce point).

Exercice 3 : Les collisions élastiques à une dimension

a) Une particule α (dont la masse est m_1 = 4 u) entre en collision frontale élastique avec un noyau d'or (dont la masse est m_2= 197 u) initialement immobile. Le symbole u représente l'unité de la masse atomique. Quel pourcentage de son énergie cinétique initiale la particule α perd-elle ?

b) Un corps de 2 kg entre en collision élastique avec un corps immobile et continue son mouvement dans la direction initiale, mais avec une vitesse égale au quart de sa vitesse initiale.

1) Quelle est la masse du corps initialement immobile ?

2) Quelle serait la vitesse du centre de masse des deux corps si la vitesse initiale du corps de 2 kg était de 4 m/s ?

c) Deux sphères en titane se dirigent directement l'une vers l'autre. Elles ont même vitesse et elles entrent en collision élastique. Après la collision, l'une des sphères, d'une masse de 300 g demeure immobile.

1) Quelle est la masse de l'autre sphère ?

2) Quelle est la vitesse du centre de masse des deux sphères si la vitesse initiale de chaque sphère est 2 m/s ?

Exercice 4 : Les collisions à deux dimensions

a) Une particule α heurte un noyau d'oxygène initialement immobile. La particule α est déviée de son mouvement initial d'un angle de 64° et le noyau d'oxygène recule d'un angle de 51° de l'autre côté de la direction initiale. La vitesse finale du noyau est $1{,}20.10^5$ m/s. En unité de masse atomique, la masse de la particule α est 4 u et celle du noyau d'oxygène est 16 u.
Déterminer les vitesses finale et initiale de la particule α.

b) Deux balles, *A* et *B*, de masses différentes inconnues, entrent en collision. Initialement, *A* est immobile et *B* a une vitesse de module *v*. Après la collision, *B* se déplace à une vitesse de module $\frac{v}{2}$ en suivant une direction perpendiculaire à celle de son mouvement initial.

1) **Déterminer** la direction suivie par la balle *A* après la collision
2) **Démontrer** que vous ne pouvez pas déterminer le module de la vitesse de *A* à l'aide des données fournies.

c) Lors d'une partie de billard, la boule blanche heurte une autre boule de même masse qui est initialement immobile. Après la collision, la blanche se déplace à 3,5 m/s dans une direction formant un angle de 22° avec sa direction initiale ; la seconde boule se déplace à une vitesse de 2 m/s.

1) **Déterminer** l'angle formé par le mouvement de la seconde boule et le mouvement initial de la blanche.
2) **Déterminer** le module de la vitesse initiale de la blanche.
3) L'énergie cinétique (des centres de masse : ne pas tenir compte de la rotation) est-elle conservée ?

Exercice 5 : la balle de baseball

Une balle de baseball de 140 g voyage horizontalement à une vitesse $\vec{v_i}$ de module 39 m/s quand une batte la frappe. Après avoir quitté la batte, la balle voyage dans la direction opposée à une vitesse $\vec{v_f}$ ayant un module de 39 m/s.

a) Quelle impulsion $\vec{J}$ agit sur la balle pendant qu'elle est en contact avec la batte durant la collision ?

Elément de réponse : $\left|\vec{J}\right| = 10{,}9$ kg.m.s^{-1}

b) La durée de l'impact Δt de la collision balle-batte est de 1,20 ms. Quel est le module de la force moyenne agissant sur la balle ? **Comparer** cette valeur à celle du module de la force gravitationnelle agissant sur la balle. **Conclure**.

c) Si la collision n'est pas frontale et que la balle quitte la batte à une vitesse $\vec{v_f}$ de 45 m/s en suivant un angle de 30° vers le haut (figure 7---), quelle est la nouvelle impulsion sur la balle ?

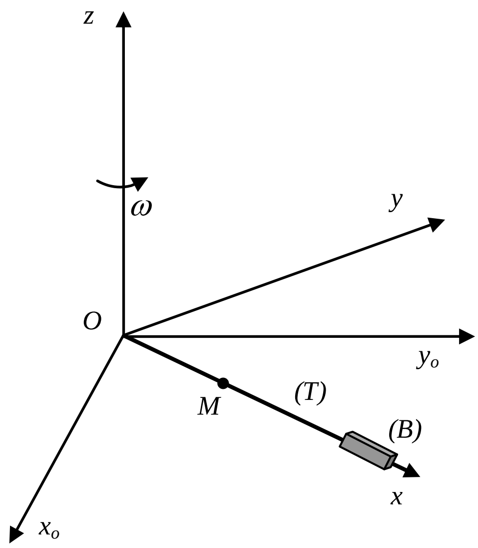
Elément de réponse : $\theta = 16{,}1°$

Université Paul Sabatier
L1 STS PCP
Toulouse, le 18 mai 2010

EXAMEN
DE MECANIQUE DU POINT
(Durée : 1h30)

Toutes les parties sont indépendantes. Toutes les justifications nécessaires seront notées.
Les documents personnels, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

I – Composition de mouvement



Une masselotte ponctuelle *M*, de masse *m*, peut glisser sans frottement sur une tige (*T*) perpendiculaire en *O* à un axe vertical ascendant *Oz*, au bout de laquelle est fixée une butée (*B*).

L'axe *z'z* est entraîné par un moteur qui fait tourner la tige (*T*) à la vitesse angulaire constante ω dans le plan horizontal x_oOy_o d'un repère galiléen $\Re_o$ fixe orthonormé direct $(O, x_o y_o z)$.

Soient $\left(\overrightarrow{e_{x_o}}, \overrightarrow{e_{y_o}}, \overrightarrow{e_z}\right)$ les vecteurs unitaires de chacun des axes du repère galiléen $\Re_o$, et $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ les vecteurs unitaires du repère orthonormé direct $\Re(O, xyz)$ lié à (*T*). La tige (*T*) est portée par l'axe *Ox*.

La masselotte est repérée par ses coordonnées (x, y, z), et tous les vecteurs seront explicités dans la base $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ liée à $\Re$.

A l'instant initial $t = 0$, la tige (*T*) est confondue avec l'axe Ox_o, et la masselotte est lancée depuis le point *O* avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_o} = v_o \overrightarrow{e_x}$ où $v_o > 0$.
On note *g* l'intensité du champ de pesanteur terrestre.

1) Donner l'expression du vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}\left(\Re / \Re_O\right)$ de $\Re$ par rapport à $\Re_o$.

2) Donner la définition, puis déterminer l'expression de :
   a) la vitesse $\vec{v}\ (M/\Re)$ du point *M* dans $\Re$.
   b) la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e\ (M, \Re/\Re_o)$.
   c) l'accélération $\vec{a}\ (M/\Re)$ du point *M* dans $\Re$.
   d) l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e\ (M, \Re/\Re_o)$.
   e) l'accélération de Coriolis $\vec{a}_c\ (M, \Re/\Re_o)$.

3) Enoncer les lois de composition des vitesses et des accélérations, et en déduire l'expression de la vitesse $\vec{v}(M/\Re_o)$ et de l'accélération $\vec{a}(M/\Re_o)$ de *M* dans $\Re_o$.

4) Donner l'expression des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

5) Réaliser le bilan des forces s'exerçant sur la masse dans $\Re$.

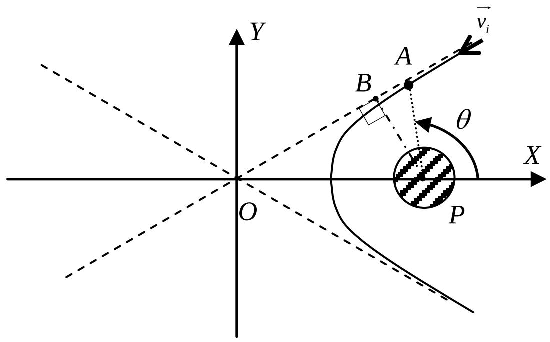
6) Enoncer la relation fondamentale de la dynamique dans $\Re$.

7) En déduire l'équation différentielle du mouvement dans $\Re$.

II – Impact d'un astéroïde sur une planète du système solaire (d'après AJP, août 2006)

On considère un astéroïde ponctuel *A*, de masse *m*, s'approchant d'une planète, de centre *P*, de masse *M*, avec une vitesse $\vec{v_i}$ par rapport au référentiel $\Re$, dont l'origine est *P*, et dont les trois axes sont parallèles à ceux du référentiel galiléen de Copernic.

$\vec{v_i}$ est la vitesse de *A*, lorsque l'astéroïde *A* est infiniment éloigné de la planète *P*. "L'impact" entre la planète et l'astéroïde se fait en un point *B*, et on désigne le paramètre d'impact par $b_i = PB$.



On négligera pour tout l'exercice l'influence de tout autre astre. De plus, on considère que $m \ll M$, de sorte que le problème à 2 corps peut se ramener à celui de *A* dans $\Re$.

On note *G* la constante universelle de gravitation.

1) Caractéristiques du mouvement de *A*, lorsque qu'il est en interaction avec *P*.
   a) Donner la définition d'une force centrale.
   b) La force d'interaction exercée par *P* sur *A* est-elle une force centrale ? Justifier.
   c) Donner la définition d'une force conservative.
   d) La force d'interaction exercée par *P* sur *A* est-elle une force conservative ? Justifier.
   e) Donner l'expression du moment cinétique $\overrightarrow{L_P}(A/\Re)$ de *A* dans $\Re$, au point *P*.
   f) Déduire du théorème du moment cinétique appliqué sur *A*, au point *P*, les caractéristiques de $\overrightarrow{L_P}(A/\Re)$.
   g) Que peut-on en déduire pour le mouvement de *A* dans $\Re$?

2) Energétique
   a) Déterminer, en fonction de $r = PA$, l'expression de l'énergie potentielle d'interaction de *A* due à l'influence de *P*. On choisira comme origine de l'énergie potentielle, la position initiale de *A*, lorsqu'il est infiniment éloigné de *P*.
   b) Quelle est la caractéristique de l'énergie mécanique ? Justifier.
   c) Déduire du théorème de l'énergie mécanique, une relation entre la vitesse *v* de *A*, la vitesse initiale v_i de *A*, et $r = PA$ la position de *A*.

3) Equation de la trajectoire : l'énergie totale $\mathcal{E}$ de l'astéroïde est telle que A est dans un état de diffusion, et sa trajectoire est une hyperbole (A décrit donc une branche de l'équation mathématique caractéristique de la trajectoire).

Dans le repère $\Re$, l'équation polaire de la trajectoire conique de A a pour expression :

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$

où $p = \dfrac{L^2}{m(GMm)}$, $e = \sqrt{1 + \dfrac{2\mathcal{E}L^2}{m(GMm)^2}}$, $L = \overrightarrow{L_P}(A/\Re)$, $r = PA$ et $\theta = \left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{e_x}\right)$.

a) Comment appelle-t-on p et e ? Quelles sont leurs dimensions ? Préciser, dans le cas étudié, les valeurs que peut prendre e.

b) Expliquer pourquoi on peut écrire $L = mv_i b_i$.

c) Déterminer alors l'expression de b_i en fonction de r, G, M et v_i.

d) Déduire des questions précédentes les expression de p et e en fonction de v_i, G, M et b_i, puis l'expression de b_i en fonction de p et e.

e) Sachant que dans le repère cartésien $\Re_{cart} = (O, XYZ)$ représenté sur la figure ci-dessus, l'équation de la trajectoire s'écrit $\left(\dfrac{X}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{Y}{b}\right)^2 = 1$, avec $p = \dfrac{b^2}{a}$ et $a = \dfrac{p}{e^2 - 1}$, exprimer b en fonction de b_i.

f) Déterminer l'expression du périgée $r_{\min} = (PA)_{\min}$ en fonction de p et e.

g) Exprimer la vitesse maximale de A, en fonction de v_i, G, M, p et e.

Méca_L1PCP_Mai2010

I

1) $\vec{\Omega}(R/R_0) = \omega \vec{e}_z$

2) a - $\vec{v}(M/R) = \left[\dfrac{d\vec{OM}}{dt}\right]_R = \dot{x}\,\vec{e}_x$

b. $\vec{v}_e(M,R/R_0) = \vec{v}(O \in R/R_0) + \vec{\Omega}(R/R_0) \times \vec{OM} = +\omega x \vec{e}_y$

c - $\vec{a}(M/R) = \left[\dfrac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\right]_R = \ddot{x}\,\vec{e}_x$

d - $\vec{a}_e(M,R/R_0) = \underbrace{\vec{a}(O\in R/R_0)}_{=0} + \vec{\Omega}(R/R_0)\times\left[\vec{\Omega}(R/R_0)\times\vec{OM}\right] + \underbrace{\left[\dfrac{d\vec{\Omega}(R/R_0)}{dt}\right]_{R_0}}_{=0}\times\vec{OM}$

$= -\omega^2 x\,\vec{e}_x$

e - $\vec{a}_c(M,R/R_0) = 2\vec{\Omega}(R/R_0)\times\vec{v}(M/R) = 2\omega\dot{x}\,\vec{e}_y$

3) LCV : $\vec{v}(M/R_0) = \vec{v}(M/R) + \vec{v}_e(M,R/R_0)$
LCA : $\vec{a}(M/R_0) = \vec{a}(M/R) + \vec{a}_e(M,R/R_0) + \vec{a}_c(M,R/R_0)$

4) $\vec{F}_{ie}(M,R/R_0) = -m\vec{a}_e(M,R/R_0)$ et $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c(M,R/R_0)$

5) $\sum\vec{F}_{ext}(M/R) = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$ et $\vec{R} \perp \vec{e}_x$ (sans frottements)
$\Rightarrow \vec{R} = R_y\vec{e}_y + R_z\vec{e}_z$.

6) $\sum\vec{F}_{ext}(M/R) = m\vec{a}(M/R)$

7) Il faut éliminer $\vec{R}$ inconnue, donc projeter sur Ox.
$\Rightarrow \underbrace{\vec{P}\cdot\vec{e}_x}_{0} + \underbrace{\vec{R}\cdot\vec{e}_x}_{0} + \vec{F}_{ie}\cdot\vec{e}_x + \vec{F}_{ic}\cdot\vec{e}_x = m\vec{a}(M/R)\cdot\vec{e}_x$

$\Leftrightarrow m\omega^2 x = m\ddot{x} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} - \omega^2 x = 0$

II

1) a) Force centrale : * tjs dirigée vers un point fixe C de R_0, appelée centre de force (ici, P = fixe, car origine de R).
* L'intensité de la force ne dépend que de $r = CM = PM$.

b) $\vec{F}_{P\to A} = -\dfrac{GMm}{PA^2}\vec{e}_{PA} \Rightarrow \begin{cases} \|\vec{F}_{P\to A}\| = \dfrac{GMm}{PA^2} = \dfrac{GMm}{r^2} \\ \vec{e}_{PA} \text{ dirigée vers P fixe ds } R \end{cases} \Rightarrow$ centrale

c) Force conservative = si son travail est indépendant du chemin suivi.

d) $\delta W(\vec{F}_{P\to A}) = \vec{F}_{P\to A}\cdot\vec{dl} = -\dfrac{GMm}{r^2}dr = d\left(\dfrac{GMm}{r}\right)$ = diff. tot. exacte.
$\Rightarrow W = \int \delta W$ ne dépend que des bornes d'arrivée et départ.

e) $\vec{L}_P(A/R) = \vec{PA}\times m\vec{v}(A/R)$

f) $\left[\dfrac{d\vec{L}_P(A/R)}{dt}\right]_R = \vec{\mathcal{M}}_P(\sum\vec{F}_{ext}) = \vec{\mathcal{M}}_P(\vec{F}_{P\to A}) = \vec{PA}\times\vec{F}_{P\to A} = \vec{0}$.

Donc $\vec{L}_P(A/R) = \vec{cte} \Rightarrow \begin{cases} \vec{L}_P(A/R) \text{ a une direction fixe} \\ L = \|\vec{L}_P(A/R)\| = cte. \end{cases}$

g) La trajectoire de A dans R se fait dans un plan qui contient P

2) a) $d\mathcal{E}_p = -\delta W \Rightarrow \mathcal{E}_p = -\dfrac{GMm}{r} + \cancel{cte}$.

b) le système est isolé $\Rightarrow \mathcal{P}(\vec{F}_{ext}^{\,non\,cons}) = 0$
TPM : $\dfrac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{ext}^{\,non\,cons}) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_m = cte$.

c) $\mathcal{E}_m = cte = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{GmM}{r} = \dfrac{1}{2}mv_i^2 + 0$
$\Rightarrow v^2 = v_i^2 + 2\dfrac{GM}{r}$

3) a) p = paramètre (m) - e = excentricité et $e > 1$ (hyperbole) (ss dim

b) $L = m\|\vec{PA}\times\vec{v}\| = m\|(\vec{PB}+\vec{BA}_i)\times\vec{v}_i\| = m\|\vec{PB}\times\vec{v}_i\| = m b_i v_i$.

c) $\|\vec{L}\| = cte \Rightarrow \|r\vec{e}_r \times r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\| = r^2\dot{\theta} = rv = cte$
Donc $rv = b_i v_i \Rightarrow b_i = r\dfrac{v}{v_i} = r\sqrt{1 + \dfrac{2GM}{rv_i^2}}$

d) $p = \dfrac{L^2}{GMm^2} = \dfrac{r^2v^2}{GM} = \dfrac{b_i^2 v_i^2}{GM} = \dfrac{1}{GM}r^2v_i^2\left(1 + 2\dfrac{GM}{rv_i^2}\right) = \dfrac{r^2v_i^2}{GM} + 2$

$e = \sqrt{1 + \dfrac{v_i^2 b_i^2 v_i^2}{G^2M^2}} \Rightarrow e^2 = 1 + \dfrac{b_i^2 v_i^4}{G^2M^2} = 1 + \dfrac{p^2}{b_i^2} \Rightarrow b_i = \dfrac{p}{\sqrt{e^2-1}}$

e) $p = \dfrac{b^2}{a} \Rightarrow b = \sqrt{ap} = \sqrt{\dfrac{p^2}{e^2-1}} = \dfrac{p}{\sqrt{e^2-1}} \Rightarrow b = b_i$.

f) $r_{min} = r(\theta = \pi) = \dfrac{p}{1+e} \Rightarrow b_i = r_{min}\sqrt{\dfrac{e+1}{e-1}} = b$

g) $v = \sqrt{v_i^2 + \dfrac{2GM}{r}} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{v_i^2 + \dfrac{2GM}{r_{min}}} = \sqrt{v_i^2 + 2\dfrac{GMp}{1+e}}$