Université Paul Sabatier TOULOUSE III

Licence 1 – semestre 2
Sciences de l'Ingénieur et Préparation aux Concours

Mécanique : contrôle continu n°3 – 45 min.

Année 2006-2007

Nom, prénom :

Note :

Section H **Groupe** (encercler) : 1 2 3 4 5 6

Répondre dans les espaces aménagés. S'ils s'avèrent insuffisants, utiliser la page 4.

I- Questions sur l'energetique du point

/4

	Reserve au correcteur
1- Donner les 3 formulations du théorème de l'énergie mécanique que nous avons vues en cours $\Delta E_m = W_{F_{nc}}$ $dE_m = \delta W_{F_{nc}}$ $\frac{dE_m}{dt} = P_{F_{nc}}(t)$	3 x 0,5
2- Qu'est-ce qui caractérise une force non conservative ? Son travail dépend du chemin suivi	1
3- Soit la force $\vec{F} = m\omega^2\rho\,\vec{e}_\rho$ où m et ω sont des constantes (respectivement, la masse et la vitesse angulaire) et ρ la distance selon l'axe $\vec{e}_\rho$. Calculer l'énergie potentielle associée. $dE_p = -dW = -\vec{F}\cdot\vec{dl}$ $\hookrightarrow dE_p = -m\omega^2\rho\,d\rho$ $\hookrightarrow E_p = -\frac{1}{2}m\omega^2\rho^2 + C^{te}$	0,5 0,5 0,5

II- Exercice de cinematique du solide : deplacement d'une roue

Une roue de rayon L, de centre C, se déplace rectilignement sur une route horizontale (Figure a). On définit un repère $R(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ fixe par rapport à la route, tel que la vitesse du centre de la roue soit égale à $\vec{V}C/R = V_0\vec{e}_y$. On définit un second repère $R^*(C,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ dont l'origine est au centre de la roue, cette même roue étant liée à un troisième repère $R_1(C,\vec{e}_x,\vec{e}_{y1},\vec{e}_{z1})$, $\vec{e}_{y1}$ étant confondu avec un des rayons de la roue. I est le point coïncidant de la roue avec la route.

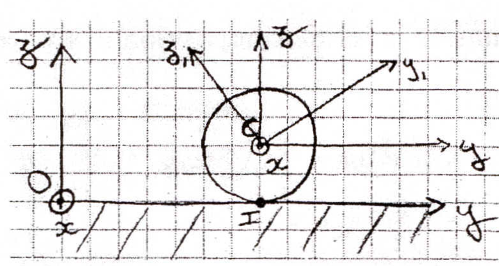

Figure a

1.Quel nom donne-t-on au repère R* ? Que vaut le vecteur rotation $\vec{\omega}_{R^*/R}$?

Repère du centre de masse. $\vec{\omega}_{R^*/R} = \vec{0}$ — 0,5 + 0,5

2. Si on appelle Ω la vitesse de rotation de la roue autour de son axe, quelle est l'expression, en projection sur $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, des vecteurs rotation $\vec{\omega}_{R1/R^*}$ et $\vec{\omega}_{R1/R}$?

$$\vec{\omega}_{R_1/R^*} = \left|\begin{matrix}\Omega\\0\\0\end{matrix}\right._R \; ; \; \vec{\omega}_{R_1/R} = \vec{\omega}_{R_1/R^*} + \vec{\omega}_{R^*/R} = \left|\begin{matrix}\Omega\\0\\0\end{matrix}\right._R$$ — 0,5 + 0,5

3. En fonction de L et V_o, trouver quelle expression doit vérifier Ω pour que la roue roule sans glisser sur la route.

* $CRSG \Rightarrow \vec{v}_{roue/R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_{I_{roue}/R} = \vec{v}_{I_{route}/R}$ — 1
* $\vec{v}_{I_{route}/R} = \vec{0}$ — 1
* $\vec{v}_{I_{roue}/R} = \vec{v}_{C/R} + \vec{\omega}_{roue/R} \wedge \vec{CI}$ — 1

$$= \left|\begin{matrix}0\\V_0\\0\end{matrix}\right._R + \left|\begin{matrix}\Omega\\0\\0\end{matrix}\right._R \wedge \left|\begin{matrix}0\\0\\-L\end{matrix}\right._R = \left|\begin{matrix}0\\V_0 + L\Omega\\0\end{matrix}\right._R$$ — 1

* donc $CRSG \Rightarrow \Omega = -\dfrac{V_0}{L}$ — 1

4. On considère un point M de la roue situé sur l'axe Cy_1 à la distance fixe CM=r (figure b). Exprimer le vecteur position $\vec{CM}$ (t) en projection sur $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sachant que $\vec{CM}$ (t=0) = r$\vec{e}_y$.

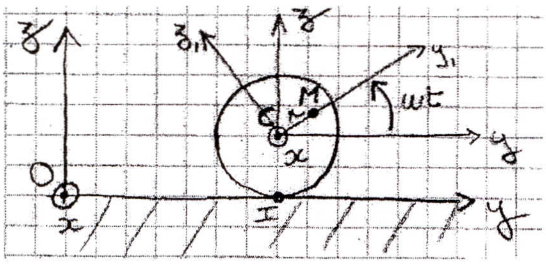

Figure b

$$\vec{CM}(t) = \left|\begin{matrix}0\\r\cos\omega t\\r\sin\omega t\end{matrix}\right._R$$ — 0,5

5a. En déduire par dérivation du vecteur position, le vecteur vitesse $\vec{v}_{M/R^*}$.

$$\vec{v}_{M/R^*} = \left.\frac{d\vec{CM}}{dt}\right|_{R^*} = \left|\begin{matrix}0\\-r\omega\sin\omega t\\r\omega\cos\omega t\end{matrix}\right._R$$ — 0,5 + 0,5

5b. De $\vec{v}_{M/R^*}$, trouver par application de la loi de composition des vitesses, l'expression de la vitesse $\vec{v}_{M/R}$.

$$\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{M/R^*} + \vec{v}_e = \vec{v}_{M/R^*} + \left(\vec{v}_{C/R} + \vec{\omega}_{R^*/R} \wedge \vec{CM}\right)$$ — 0,5 + 0,5

$$= \vec{v}_{M/R^*} + \vec{v}_{C/R} = \left|\begin{matrix}0\\-r\omega\,\cancel{\cos}\sin\omega t + V_0\\r\omega\,\cancel{\sin}\cos\omega t\end{matrix}\right._R$$ — 0,5

6. Retrouver ces 2 résultats de vitesse en appliquant directement la loi des champs de vitesse dans un solide

$$* \ \vec{v}_{M/R*} = \vec{v}_{C/R*} + \vec{\omega}_{roue/R*} \wedge \vec{CM} = \vec{0} + \begin{vmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_R \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \end{vmatrix}_R$$ 0,5

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ -r\Omega \sin\omega t \\ r\Omega\cos\omega t \end{vmatrix}_R \quad \text{CQFD}$$ 0,5

[⚠ La figure b parle de ωt alors qu'en 2°), on parle de Ω
Désolé...]

$$* \ \vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{C/R} + \vec{\omega}_{roue/R} \wedge \vec{CM} = \begin{vmatrix} 0 \\ V_0 \\ 0 \end{vmatrix}_R + \begin{vmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_R \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \end{vmatrix}_R \quad \text{CQFD}$$ 0,5 + 0,5

III- Questions de cours sur le chapitre de mécanique du solide « Eléments d'inertie » /4

a) Pour le solide « roue » étudié à l'exercice précédent (cf. figure a), auquel est associé le repère R_1, proposer, en le justifiant, un choix de base principale.

$(C x z_1)$ plan de symétrie matérielle → Cy_1 axe principal
$(C x y_1)$ " " " → Cz_1 axe principal
$(C y_1 z_1)$ " " " → Cx axe principal — 1

↳ $(\vec{e}_x, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1})$ base principale — 1

b) Quelle sera alors dans cette base, la forme de la matrice d'inertie $[I]_C$?

$$[I]_C = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix}_{R_1}$$ 1

c) Donner sans calcul ni développement, l'expression d'un des éléments non nul (au choix) de la matrice précédente.

$$I_{Cx} = \iiint (y^2+z^2)\rho \, dV$$ 1

$$\left(\text{ou} \iint (y^2+z^2)\rho_S \, dS\right)$$