UNIVERSITE PAUL SABATIER
L1 PCP

Année Universitaire 2007 -2008
17 mars 2008

Contrôle continu de mécanique

L'usage des calculatrices est interdit.
(durée: 45 minutes)

NOM :	**Prénom :**	**Groupe :**	***Note (/20) :***

4,5

Questions de cours :

On précisera toutes les grandeurs introduites.

1- Enoncer le principe de l'inertie.

Tout corps reste immobile ou conserve un mouvement rectiligne et uniforme, aussi longtemps qu'aucune force extérieure ne vient modifier son état.

1

2- Enoncer la troisième loi de Newton.

Principe de l'action et de la réaction : Soit 1 pt matériel M_1 exerçant une force $\vec{F}_{1\to 2}$ sur un autre point matériel M_2. Alors, M_2 exerce sur M_1 la force $\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2}$.

1

3- Enoncer le théorème du moment cinétique.

$$\left[\frac{d\vec{\mathcal{L}}_A(M/R)}{dt}\right]_{R} = \underbrace{\vec{AM}}_{\text{pt fixe}} \times \underbrace{\sum \vec{F}(M/R)}_{\text{Forces s'exerçant sur M dans R}}$$

$\vec{\mathcal{L}}_A(M/R)$ = moment cinétique de M en A dans R.

1,5

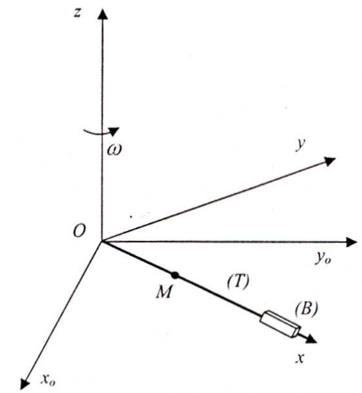
4- Donner la définition du champ de pesanteur, en fonction du champ de gravitation.

$$\underbrace{\vec{g}(M)}_{\text{chp de pesanteur}} = \underbrace{\vec{G}_T(M)}_{\text{chp de gravitation terrestre en M}} + \Omega^2 \underbrace{\vec{HM}}_{\text{projection de M sur l'axe de } \vec{\Omega}}$$

(vitesse de rot de T / $R_{copernic}$)

1

Exercice :



Une masselotte ponctuelle M, de masse m, peut glisser sans frottement sur une tige (T) perpendiculaire en O à un axe vertical Oz, au bout de laquelle est fixée une butée (B).

L'axe $z'z$ est entraîné par un moteur qui fait tourner la tige (T) à la vitesse angulaire constante ω dans le plan horizontal x_oOy_o d'un repère galiléen $\Re_o$ fixe orthonormé direct $(O,x_o y_o z)$.

Soient $(\vec{e}_{x_o},\vec{e}_{y_o},\vec{e}_z)$ les vecteurs unitaires de chacun des axes du repère galiléen $\Re_o$, et $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ les vecteurs unitaires du repère orthonormé direct $\Re(O,xyz)$ lié à (T). La tige (T) est portée par l'axe Ox.

La masselotte est repérée par ses coordonnées cylindriques (ρ,φ,z), et tous les vecteurs seront explicités dans la base $\mathcal{B}=(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ liée à $\Re$. On remarquera que $\rho = x$.

A l'instant initial $t=0$, la tige (T) est confondue avec l'axe Ox_o, et la masselotte est lancée depuis le point O avec une vitesse initiale $\vec{v}_o = v_o\vec{e}_x$ où $v_o > 0$.
On note g l'intensité du champ de pesanteur terrestre.

1) Donner l'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}(\Re/\Re_o)$ de $\Re$ par rapport à $\Re_o$.

0,5

$$\vec{\Omega}(R/R_o) = \omega\vec{e}_z$$

2) Donner la définition, puis déterminer l'expression de :
a) la vitesse $\vec{v}(M/\Re)$ du point M dans $\Re$.

1

$$\vec{v}(M/R) = \left[\frac{d\vec{OM}}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\,x\vec{e}_x}{dt}\right]_R = \dot{x}\vec{e}_x = \dot{\rho}\,\vec{e}_x$$

0,5 0,5

b) la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e(M,\Re/\Re_o)$

1,5

$$\vec{v}_e(M,R/R_o) = \cancel{\vec{v}(O\in R/R_o)} + \vec{\Omega}(R/R_o)\times\vec{OM} \quad \leftarrow 1$$

$$= \omega\vec{e}_z \times \rho\,\vec{e}_x = \omega\rho\,\vec{e}_y \quad \leftarrow 0,5$$

1

c) l'accélération $\vec{a}\,(M/\Re)$ du point M dans $\Re$.

$$\vec{a}(M|R) = \left[\frac{d\vec{v}(M|R)}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\,\dot{\rho}\vec{e}_x}{dt}\right]_R = \ddot{\rho}\,\vec{e}_x$$

0,5 0,5

2,5

d) l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e\,(M,\Re/\Re_o)$

$$\vec{a}_e(M,R/R_o) = \underbrace{\vec{a}(O\in R/R_o)}_{=\vec{0}\,(O\text{ fixe})} + \underbrace{\left[\frac{d\vec{\Omega}(R|R_o)}{dt}\right]_{R_o}}_{=\vec{0}\,(\omega = cte)} \times \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}(R|R_o)\times\left[\vec{\Omega}(R|R_o)\times\overrightarrow{OM}\right] \leftarrow 1{,}5$$

$$= \omega\vec{e}_z \times (\omega\vec{e}_z \times \rho\vec{e}_x)$$

$$= -\omega^2\rho\,\vec{e}_x \qquad 1$$

1,5

e) l'accélération de Coriolis $\vec{a}_c\,(M,\Re/\Re_o)$

$$\vec{a}_c(M,R/R_o) = 2\,\vec{\Omega}(R|R_o)\times\vec{v}(M|R) \qquad 1$$

$$= 2\omega\vec{e}_z \times \dot{\rho}\,\vec{e}_x = 2\omega\dot{\rho}\,\vec{e}_y \qquad 0{,}5$$

2

3) Enoncer les lois de composition des vitesses et des accélérations, et en déduire l'expression de la vitesse $\vec{v}(M/\Re_o)$ et de l'accélération $\vec{a}(M/\Re_o)$ de M dans $\Re_o$.

LCV : $\vec{v}(M|R_o) = \vec{v}(M|R) + \vec{v}_e(M,R|R_o)$ 0,5

$\Rightarrow \vec{v}(M|R_o) = \dot{\rho}\,\vec{e}_x + \omega\rho\,\vec{e}_y$ 0,5

LCA : $\vec{a}(M|R_o) = \vec{a}(M|R) + \vec{a}_e(M,R/R_o) + \vec{a}_c(M,R/R_o)$ 0,5

$\Rightarrow \vec{a}(M|R_o) = \ddot{\rho}\,\vec{e}_x - \omega^2\rho\,\vec{e}_x + 2\omega\dot{\rho}\,\vec{e}_y$ 0,5

2

4) Donner l'expression des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

$\vec{F}_{ie}(M,R/R_o) = -m\vec{a}_e(M,R/R_o)$ 0,5

$= +m\omega^2\rho\,\vec{e}_x$ 0,5

$\vec{F}_{ic}(M,R/R_o) = -m\vec{a}_c(M,R/R_o)$ 0,5

$= -2m\omega\dot{\rho}\,\vec{e}_y$ 0,5

1

5) Réaliser le bilan des forces s'exerçant sur la masse. ← repère non précisé ⇓ adapter le barème avec Q6

$\underbrace{\text{poids } \vec{P},\ \text{réaction } \vec{R}}_{\text{Forces vraies}},\ \underbrace{\vec{F}_{ie},\ \vec{F}_{ic}}_{\text{Forces fictives}}$

2

6) Enoncer la relation fondamentale de la dynamique :

a) Dans $\Re$:

$\Sigma\vec{F}(M|R) = m\vec{a}(M|R)$ 0,5

$\Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie}(M,R|R_o) + \vec{F}_{ic}(M,R|R_o) = m\vec{a}(M|R)$ 0,5

b) Dans $\Re_o$:

$\Sigma\vec{F}(M|R_o) = m\vec{a}(M|R_o)$ 0,5

$\Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}(M|R_o)$ 0,5

1,5

7) Projeter la relation obtenue à la question 6-a) sur l'axe de la tige, et donner l'équation différentielle du mouvement. (On ne demande pas de la résoudre).

$\begin{cases} \text{Sans frottement} \Rightarrow \vec{R} \perp \text{tige} : \vec{R}\cdot\vec{e}_x = 0 \\ \vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{P}\cdot\vec{e}_x = 0 \end{cases}$ 0,5

D'où : $m\omega^2\rho = m\ddot{\rho} \Leftrightarrow \ddot{\rho} - \omega^2\rho = 0$ 1