Contrôle continu de mécanique

L'usage des calculatrices est interdit.

(durée conseillée : 25 minutes)

NOM :	**Prénom :**	**Groupe :**	***Note (/20) :***

O étant l'origine d'un repère cartésien $\mathscr{R}\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$, la position d'un point M de l'espace peut être caractérisée par différents triplets de nombres :

- le triplet cartésien : x, y, z dans la base cartésienne $\mathscr{B}_{ca}=\left(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$.
- le triplet cylindrique : ρ, φ, z dans la base cylindrique $\mathscr{B}_{cy}=\left(\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi},\overrightarrow{e_z}\right)$.

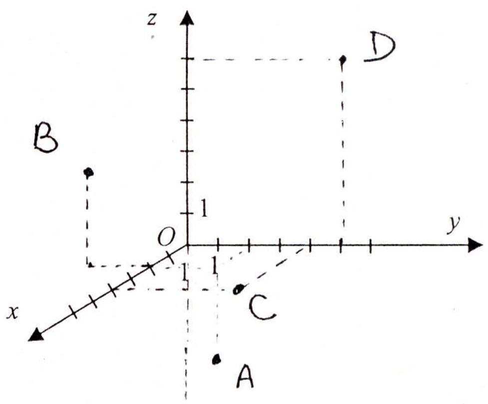
a) **Exprimer**, de manière générale, ρ, φ, z en fonction de x, y et z, puis x, y, z en fonction de ρ, φ et z.

2,5

$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} & 0{,}5 \\ \varphi = \text{Arctan}\,\frac{y}{x} & 0{,}5 \\ z = z & 0{,}5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi & 0{,}5 \\ y = \rho\sin\varphi & 0{,}5 \\ z = z \end{cases}$

b) **Positionner** sur le schéma ci-contre les points $A(2,2,-3)_{\mathscr{R}_{ca}}$, $B(2,-2,3)_{\mathscr{R}_{ca}}$, $C\left(4\sqrt{2},\frac{\pi}{4},0\right)_{\mathscr{R}_{cy}}$ et $D\left(5,\frac{\pi}{2},6\right)_{\mathscr{R}_{cy}}$ (Les coordonnées sont données en unité S.I., l'unité étant reportée sur chacun des axes ci-dessous).

4



c) **Déterminer** les dérivées suivantes :

$\left[\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right]_{\mathscr{R}} = \underbrace{\vec{\Omega}(R_{cyl}/R)\times\vec{e_\rho}}_{0{,}5} = \underbrace{\dot\varphi\,\vec{e_z}}_{0{,}5}\times\vec{e_\rho} = \underbrace{\dot\varphi\,\vec{e_\varphi}}_{0{,}5}.$

3,5

$\left[\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}\right]_{\mathscr{R}} = \underbrace{\vec{\Omega}(R_{cyl}/R)\times\vec{e_\varphi}}_{0{,}5} = \dot\varphi\,\vec{e_z}\times\vec{e_\varphi} = \underset{0{,}5}{-}\,\dot\varphi\,\underset{0{,}5}{\vec{e_\rho}}.$

$\left[\frac{d\overrightarrow{e_z}}{dt}\right]_{\mathscr{R}} = \underbrace{\vec{\Omega}(R_{cyl}/R)\times\vec{e_z}}_{0{,}5} = \dot\varphi\,\vec{e_z}\times\vec{e_z} = \vec{0}$