Université Paul Sabatier TOULOUSE III

Licence 1 – semestre 2
Sciences de l'Ingénieur et Préparation aux Concours

Mécanique : contrôle continu n°1 - 45 min. Année 2006-2007

Nom, prénom :

Section H **Groupe :** **Note :**

- Rédaction dans les espaces aménagés sur la feuille d'énoncé recto-verso -

---

1. Soient les vecteurs $\vec{a} = \begin{vmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}_R$ et $\vec{b} = \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}_R$. — 2,25

a- Quelles sont les composantes du vecteur unitaire de même direction et de même sens que le vecteur $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$?

$\vec{c} = \begin{vmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ -3 \\ 7 \end{vmatrix}$ — 3x0,25

$\hookrightarrow \vec{u}_c = \frac{1}{\sqrt{59}} \begin{vmatrix} -1 \\ -3 \\ 7 \end{vmatrix}$ — 0,5

b- Quel est l'angle (en valeur absolue) entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$?

$\cos\Theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a.b} = \frac{-21}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{10}} \Rightarrow \Theta \simeq 160°$ — 0,5+0,5

ou

$\sin\Theta = \frac{\|\vec{a}\wedge\vec{b}\|}{a.b} = \frac{\sqrt{59}}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{10}} \Rightarrow \Theta \simeq 20°$

---

2. Coordonnées cylindriques ρ, φ et z. — 6,75

a) Sur un ou plusieurs dessins appropriés, faire figurer les 3 variables ρ, φ et z et les 3 vecteurs de base associés $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$ et $\vec{e}_z$.
Indiquer la dimension physique, l'unité et le domaine de variation de chacune des variables.

b) Donner les composantes du vecteur position $\vec{OM}$ et du vecteur $d\vec{OM}$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.

c) Donner les composantes de $\vec{e}_\varphi$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et celles de $\vec{e}_y$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.

(a) • dessin (s) → positionnement correct de ρ, φ, z — 3x0,25
→ positionnement correct de $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ — 3x0,25

• ρ → longueur (mètre), $\mathbb{R}^+$ — 3x0,25
φ → angle (radian), $[0, 2\pi]$ — 3x0,25
z → longueur (mètre), $\mathbb{R}$ — 3x0,25

(b) $\vec{OM} = \begin{vmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{vmatrix}_{R_c}$; $d\vec{OM} = \begin{vmatrix} d\rho \\ \rho d\varphi \\ dz \end{vmatrix}_{R_c}$ — 0,5+0,5

(c) $\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y$ — 1

$\vec{e}_y = \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi + \sin\varphi\, \vec{e}_\rho$ — 1

…/…

---

3. Que vaut $\left.\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_R$? : $-\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho$ Que vaut $\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{R_c}$? : $\vec{0}$ *(aucun calcul n'est demandé)* — 0,5+0,5 — 1

---

4. Expliquer pourquoi $\left.\frac{d\vec{e}_x}{d\varphi}\right|_{Rc} = -\vec{e}_y$ — 1

Par un dessin
ou par $\left.\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right|_{R_c} = \vec{\omega}_{R_c/R} \wedge \vec{e}_x$ — 1
ou …

---

5. Dans l'expression : $\vec{v}_{M/R} = \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix}_R$, la lettre R apparait 2 fois. A-t-elle dans les deux cas, le même sens? Si oui lequel, sinon, lesquels? — 1

Non — 0,5

$\hookrightarrow$ référentiel (point de vue de l'observateur) / repère (base, projection) — 0,5

---

6. Par le calcul, retrouvez quelles sont les composantes cylindriques de la vitesse $\vec{v}_{M/R}$. — 2

$\vec{v}_{M/R} = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_R$ — 0,5

$= \left.\frac{d(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z)}{dt}\right|_R$ — 0,5

$= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R + \dot{z}\vec{e}_z + z\left.\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right|_R$ — 0,5

$= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho(\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) + \dot{z}\vec{e}_z + z.\vec{0}$ — 0,5

---

7. a- Ajouter les 3 composantes manquantes du vecteur accélération $\vec{a}_{M/R}$ *(aucun calcul n'est demandé)* — 2,5

$\vec{a}_{M/R} = \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix}_R = \begin{vmatrix} \ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2 \\ \rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi} \\ \ddot{z} \end{vmatrix}_{R_c} = \begin{vmatrix} \dot{v} \\ v^2/\mathcal{R} \\ 0 \end{vmatrix}_{RI}$ *(RI : repère intrinsèque ou repère de Frenet)* — 3x0,5

b- Que représente $\mathcal{R}$ dans la composante $v^2/\mathcal{R}$? En donner la signification.

$\hookrightarrow$ rayon de courbure — 0,5

Représente le rayon du cercle qui localement est tangent à la trajectoire — 0,5

---

8. Donner sans calculs mais en donnant le détail et la signification de chacun des termes de : — 3,5

a) la loi de composition des vitesses

$\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{M/R'} + \vec{v}_e = \vec{v}_{M/R'} + (\vec{v}_{O'/R} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M})$ — 1

. $\vec{\omega}_{R'/R}$: vecteur rotation — 0,5
. O' : origine de R'

b) la loi de composition des accélérations

$\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R'} + \vec{a}_c + \vec{a}_e = \vec{a}_{M/R'} + 2\,\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{M/R'} + \left(\vec{a}_{O'/R} + \left.\frac{d\vec{\omega}_{R'/R}}{dt}\right|_R \wedge \vec{O'M} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M})\right)$ — 2